CAPITOLUL II

CENTRUL DE MASĂ

2.1. Centrul de masă al unui solid rigid

În aplicaţia numărul doi din capitolul I, s-a definit şi calculat centrul de masă al unui sistem de puncte materiale. Pentru solidul rigid, care este un sistem continuu, adică un mediu material care umple complet un domeniu D din spaţiu, noţiunile se extind printr-un proces de trecere la limită.

Fie un solid rigid (S) şi un reper $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ solidar cu acesta (fig.2.1.). Făcând o diviziune disjunctă pentru masă, se poate scrie:

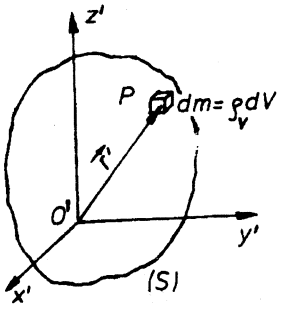

fig. 2.1.

$$M = \sum \Delta m_i \,, \tag{2.1}$$

în care Δm_i sunt masele elementelor acelei diviziuni iar M este masa rigidului. Prin trecere la limită, masa rigidului se explică, folosind definiţia integralei, prin:

$$M = \int_m dm \,, \tag{2.2}$$

care este o integrală Stiljes-Lebesque.

Corpurile materiale pot fi clasificate, după forma lor, în volume materiale (fig. 2.1.), suprafețe materiale (fig. 2.2.) și curbe materiale (fig.2.3.).

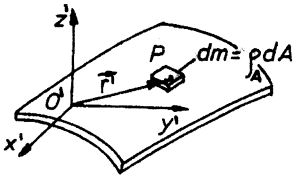

fig. 2.2.

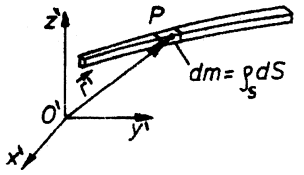

fig. 2.3.

În fiecare punct al corpului se poate defini o **masă specifică** numită și **densitate de masă**, presupusă a fi funcție continuă de punct. Notând elementul de volum cu dV, elementul de arie cu dA și elementul de curbă cu ds, atunci, într-un punct P al corpului, putem defini densitatea de mașă în cazul unui volum material, în cazul unei suprafețe materiale sau în cazul unei curbe materiale ca fiind dată respectiv de:

$$\rho_V(P)=\frac{dm}{dV},\ \rho_A(P)=\frac{dm}{dA}\ \text{și}\ \rho_S(P)=\frac{dm}{ds}. \tag{2.3}$$

Masa corpului material este acum:

$$M=\int_m dm=\begin{cases}\int\limits_{(V)}\rho_V(P)dV,\\ \int\limits_{(A)}\rho_A(P)dA,\\ \int\limits_{(S)}\rho_S(P)ds,\end{cases} \tag{2.4}$$

în care integralele sunt de volum, de suprafață și respectiv pe curbă, după cum corpul este un volum material, o suprafață materială sau o curbă materială.

În general, în activitatea curentă inginerească, se lucrează cu corpuri omogene la care densitatea este aceeași în toate punctele corpului. În acest caz, din (2.4) rezultă respectiv:

$$M=\rho_V^0\cdot V,\ M=\rho_A^0\cdot A,\ M=\rho_S^0\cdot L, \tag{2.5}$$

din care se poate deduce şi unitatea de măsură pentru cele trei tipuri de densitate:

$$\rho_V^0\left[\frac{kg}{m^3}\right], \rho_A^0\left[\frac{kg}{m^2}\right], \rho_S^0\left[\frac{kg}{m}\right]. \tag{2.6}$$

Definiţie:

Se numeşte **centru de masă** al unui solid rigid punctul G definit prin vectorul de poziţie $\overrightarrow{O'G} = \vec{r}_G'$ dat de:

$$\vec{r}_G' = \frac{\int\limits_{(M)} \vec{r}'dm}{\int\limits_{(M)} dm} = \frac{\int\limits_{(M)} \vec{r}'dm}{M} \tag{2.7}$$

în care $\vec{r}'$ este vectorul de poziţie al unui punct curent P în raport cu care se face integrarea.

Această definiţie este o consecinţă firească a extinderii prin trecere la limită a relaţiei (1.115).

În cazul volumelor materiale, suprafeţelor material şi curbelor materiale relaţia (2.7) capătă formele:

$$\vec{r}_G' = \frac{\int\limits_{M} \vec{r}'dm}{M} = \begin{cases} \dfrac{\int\limits_{(V)} \rho_V(P)dV}{M}, \\ \dfrac{\int\limits_{(A)} \rho_A(P)dA}{M}, \\ \dfrac{\int\limits_{(L)} \rho_S(P)ds}{M}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Pentru un corp care se mişcă la suprafaţa solului, se consideră că centrul de masă coincide cu centrul de greutate al solidului, adică cu punctul de aplicaţie al greutăţii $\vec{G}$:

În cazul corpurilor omogene, ținând cont de faptul că densitate este constantă şi de relațiile (2.5), centrul de masă G are vectorul de poziție dat de:

$$\vec{r}'_G = \frac{\int_{(V)} \vec{r}' dV}{V}, \quad \vec{r}'_G = \frac{\int_{(A)} \vec{r}' dA}{A}, \quad \vec{r}'_G = \frac{\int_{(L)} \vec{r}' ds}{L} \tag{2.9}$$

Pentru a exemplifica modul de obținere a relațiilor (2.9), vom considera cazul unui volum material:

$$\vec{r}'_G = \frac{\int_{(m)} \vec{r}' dm}{M} = \frac{\int_{(m)} \vec{r}' \rho_V^0 dV}{\rho_V^0 V} = \frac{\rho_V^0 \int_{(m)} \vec{r}' dV}{\rho_V^0 V} = \frac{\int_{(m)} \vec{r}' dV}{V} \tag{2.10}$$

Coordonatele centrului de masă la corpurile omogene de tip volum materială sunt:

$$x'_G = \frac{\int_{(V)} x' dV}{V}, \quad y'_G = \frac{\int_{(V)} y' dV}{V}, \quad z'_G = \frac{\int_{(V)} z' dV}{V} \tag{2.11}$$

Coordonatele centrului de masă la corpurile omogene de tip suprafață material sunt:

$$x'_G = \frac{\int_{(A)} x' dA}{A}, \quad y'_G = \frac{\int_{(A)} y' dA}{A}, \quad z'_G = \frac{\int_{(A)} z' dA}{A} \tag{2.12}$$

Coordonatele centrului de masă la corpurile omogene de tip curbă materială sunt:

$$x'_G = \frac{\int_{(L)} x' ds}{L}, \quad y'_G = \frac{\int_{(L)} y' ds}{L}, \quad z'_G = \frac{\int_{(L)} z' ds}{L} \tag{2.13}$$

2.2. Proprietăți ale centrului de masă

Există două proprietăți importante ale centrului de masă care se pot utiliza pentru determinarea mai rapidă a poziției acestuia.

1. Dacă un solid rigid are un plan de simetrie materială, o axă de simetrie materială sau un centru de simetrie materială, atunci centrul de masă G al corpului se află în planul de simetrie, pe axa de simetrie sau în centrul se simetrie.

Prin simetrie materială se înțelege simetria din punct de vedere geometric şi din punct de vedere al repartiției maselor adică densității egale în punctele simetrice.

Fie P şi P' punctele simetrice față de un plan de simetrie. Alegând acest plan drept plan de coordonate $O'x'y'$, avem:

$$P(x',y',z');\ P'(x',y',-z');\ \rho(P)=\rho(P'), \tag{2.14}$$

deci:

$$z'_G=\frac{\int\limits_{(M)} z'dm}{M}=\frac{\int\limits_{(V)}\rho dV}{M}=0, \tag{2.15}$$

fiindcă suma integrală este nulă şi astfel este demonstrată proprietatea.

Analog se demonstrează că dacă $O'z'$ este o axă de simetrie, $x'_G=0$ şi $y'_G=0$, deoarece şi în acest caz particulele simetrice față de axă, P şi P', au coordonatele $P(x',y',z')$ şi $P'(-x',-y',z')$ şi $\rho(P)=\rho(P')$ ceea ce anulează sumele integrale care intervin la calculul coordonatelor x'_G şi y'_G.

În cazul centrului de simetrie O', vectorii de poziție ai punctelor P şi P' sunt $\overrightarrow{O'P}=\vec{r}'$, $\overrightarrow{O'P'}=-\vec{r}'$ iar $\rho(P)=\rho(P')$. Din relația (2.7) rezultă $\vec{r}'_G=0$, deci punctele G şi O' coincid.

2. Dacă un solid rigid de masă M se descompune în n porțiuni de masă M_i fiecare având centrul de masă G_i determinat, în raport cu reperul $R'(O',\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$ prin vectorul de poziție $\vec{r}'_{G_i}$, atunci vectorul de poziție al centrului de masă G al solidului se determină cu relația:

$$\vec{r}'_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} M_i \vec{r}'_{G_i}}{\sum_{i=1}^{i=n} M_i} \quad (i = 1,2,...,n), \tag{2.16}$$

iar coordonatele sale sunt:

$$x'_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} M_i x'_{G_i}}{\sum_{i=1}^{i=n} M_i}, \quad y'_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} M_i y'_{G_i}}{\sum_{i=1}^{i=n} M_i}, \quad z'_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} M_i z'_{G_i}}{\sum_{i=1}^{i=n} M_i} \quad (i = 1,2,...,n), \tag{2.17}$$

în care sumele sunt înțelese în sens algebric, adică masele care se scot primesc semnul minus.

Demonstrația acestei proprietăți se bazează pe proprietatea de aditivitate a integralei, putându-se scrie:

$$\vec{r}'_G = \frac{\int_{(M)} \vec{r}' dm}{M} = \frac{\int_{(M_1)} \vec{r}' dm + \int_{(M_2)} \vec{r}' dm + ... + \int_{(M_n)} \vec{r}' dm}{M}. \tag{2.18}$$

Pe de altă parte, avem:

$$\vec{r}'_{G_i} = \frac{\int_{(M_i)} \vec{r}' dm}{M_i} \quad (i = 1,2,...,n), \tag{2.19}$$

de unde:

$$\int_{(M_i)} \vec{r}' dm = M_i \vec{r}'_{G_i} \quad (i = 1,2,...,n). \tag{2.20}$$

Înlocuind (2.20) în (2.18) se obține:

$$\vec{r}'_G = \frac{M_1 \vec{r}'_{G_1} + M_2 \vec{r}'_{G_2} + ... + M_n \vec{r}'_{G_n}}{M_1 + M_2 + ... + M_n}, \tag{2.21}$$

ceea ce demonstrează proprietatea.

În cazul corpurilor omogene de tip volum material, suprafață materială sau curbă materială, avem respectiv:

$$M_i = \rho_V^0 V_i,\ M_i = \rho_A^0 A_i \text{ şi } M_i = \rho_S^0 L_i \ (i = 1,2,...,n). \qquad (2.22)$$

Folosind relațiile anterioare în (2.16), se simplifică densitatea şi rezultă că, pentru corpuri omogene, se obțin următoarele formule de calcul pentru vectorul de poziție a centrului de masă şi pentru coordonatele sale:

– pentru volume materiale omogene:

$$\vec{r}'_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \vec{r}'_{G_i} V_i}{\sum_{i=1}^{i=n} V_i},\ x'_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x'_{G_i} V_i}{\sum_{i=1}^{i=n} V_i},\ y'_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} y'_{G_i} V_i}{\sum_{i=1}^{i=n} V_i},\ z'_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} z'_{G_i} V_i}{\sum_{i=1}^{i=n} V_i}; \qquad (2.23)$$

– pentru suprafețe materiale:

$$\vec{r}'_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \vec{r}'_{G_i} A_i}{\sum_{i=1}^{i=n} A_i},\ x'_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x'_{G_i} A_i}{\sum_{i=1}^{i=n} A_i},\ y'_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} y'_{G_i} A_i}{\sum_{i=1}^{i=n} A_i},\ z'_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} z'_{G_i} A_i}{\sum_{i=1}^{i=n} A_i}; \qquad (2.24)$$

– pentru curbe materiale:

$$\vec{r}'_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \vec{r}'_{G_i} L_i}{\sum_{i=1}^{i=n} L_i},\ x'_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x'_{G_i} L_i}{\sum_{i=1}^{i=n} L_i},\ y'_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} y'_{G_i} L_i}{\sum_{i=1}^{i=n} L_i},\ z'_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} z'_{G_i} L_i}{\sum_{i=1}^{i=n} L_i}; \qquad (2.25)$$

în care sumele sunt înțelese în sens algebric, adică zonele care se scot capătă semnul minus.

2.3. Momente statice

Momentele statice se notează cu S şi sunt mărimi fizice ce se definesc cu ajutorul integralelor care intervin în calculul centrului de masă. Există astfel următoarele tipuri de momente statice:

a. momente statice planare care se definesc în raport cu planele de

coordonate $y'O'z'$ notat (P_1), $x'O'z'$ notat (P_2) şi $x'O'y'$ notat (P_3) astfel:

$$S_{P_1} = \int_{(M)} x'dm = Mx'_G,$$

$$S_{P_2} = \int_{(M)} y'dm = My'_G, \qquad (2.26)$$

$$S_{P_3} = \int_{(M)} z'dm = Mz'_G;$$

b. moment static polar care se defineşte în raport cu polul O':

$$\vec{S}_{O'} = \int_{(M)} \vec{r}'dm = M\vec{r}'_G. \qquad (2.27)$$

2.4. Determinarea poziţiei centrului de masă la unele corpuri omogene simple

a. Curbe materiale

1. Bara rectilinie omogenă

Centrul de masă G al acestui tip de corp coincide cu centrul de simetrie situat la mijlocul barei (fig. 2.4.).

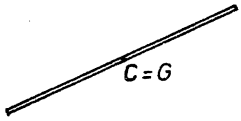

fig. 2.4.

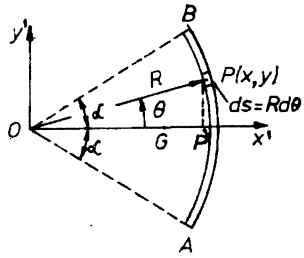

fig. 2.5.

2. Bara omogenă în formă de arc de cerc

Se consideră o bară sub forma unui arc de cerc $\overset{\frown}{AB}$ care are raza R iar unghiul $A\hat{O}B = 2\alpha$. Distanța de la centrul O al cercului la centrul de masă G, măsurată pe axa de simetrie, este:

$$O'G = \frac{R\sin\alpha}{\alpha} \text{ cu } \alpha \text{ în radiani.} \tag{2.28}$$

Alegând axa de simetrie ca axă $O'x'$, rezultă $y'_G = 0$ iar x'_G trebuie calculat cu formula:

$$x'_G = O'G = \frac{\int_{(L)} x'ds}{\int_{(L)} ds}. \tag{2.29}$$

Fie P un punct pe arcul de cerc. Din triunghiul dreptunghic $O'PP'$ (fig. 2.5.) rezultă:

$$x' = R\cos\theta,\ y' = R\sin\theta, \tag{2.30}$$

iar lungimea arcului de cerc elementar ds se obține ca produsul dintre raza cercului şi unghiul la centru $d\theta$ corespunzător:

$$ds = Rd\theta. \tag{2.31}$$

Cu aceste relații avem:

$$x'_G = O'G = \frac{\int_{-\theta}^{\theta} R\cos\theta \cdot Rd\theta}{\int_{-\theta}^{\theta} Rd\theta} = \frac{R^2\sin\theta\Big|_{-\alpha}^{\alpha}}{R\theta\Big|_{-\alpha}^{\alpha}} = \frac{R\sin\alpha}{\alpha}. \tag{2.32}$$

În cazul particular al unui semicerc $\alpha = \frac{\pi}{2}$ şi se obține:

$$x'_G = \frac{2R}{\pi}. \tag{2.33}$$

b. Suprafețe materiale plane omogene

1. Placa dreptunghiulară omogenă

Centrul de masă al unei plăci dreptunghiulare se află la intersecția diagonalelor sau la jumătate din lungimea laturilor (fig. 2.6.).

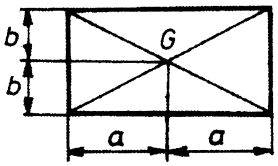

fig. 2.6.

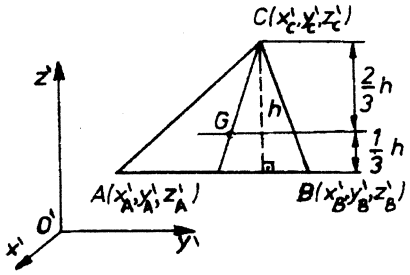

fig. 2.7.

2. Placa triunghiulară omogenă

În cazul unui triunghi, centrul de masă G se află la intersecția medianelor sau la $\frac{1}{3}$ de bază și $\frac{2}{3}$ de vârf (fig. 2.7.).

Dacă se cunosc coordonatele vârfurilor, atunci coordonatele centrului de masă se determină ca medie aritmetică a coordonatelor vârfurilor:

$$x'_G = \frac{x'_A + x'_B + x'_C}{3}, \quad y'_G = \frac{y'_A + y'_B + y'_C}{3}, \quad z'_G = \frac{z'_A + z'_B + z'_C}{3}. \qquad (2.34)$$

3. Placa omogenă sub formă de arc de cerc

Fie un sector de cerc de rază R care are unghiul la centru $A\hat{O}B = 2\alpha$, cu α în radiani. Alegând originea O' în centrul cercului și axa de simetrie ca axă $O'x'$ (fig. 2.8), rezultă $y'_G = 0$ iar x'_G de forma:

$$x'_G = O'G = \frac{\int\limits_{(A)} y' dA}{\int\limits_{(A)} dA}, \qquad (2.35)$$

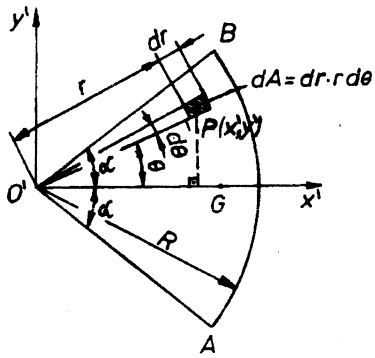

fig. 2.8.

Elementul de arie dA este aproximat cu un dreptunghi de laturi dr şi $ds = rd\theta$, iar coordonatele punctului curent P sunt $x' = r\cos\theta$ şi $y' = r\sin\theta$ (fig.2.8.). În aceste condiţii se poate scrie:

$$x'_G = \frac{\iint r\cos\theta\, dr\, rd\theta}{\iint dr\, rd\theta} = \frac{\int_0^R r^2 dr \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta d\theta}{\int_0^R rdr \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta} = \frac{\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^R \sin\theta\Big|_{-\alpha}^{\alpha}}{\left.\frac{r^2}{2}\right|_0^R \theta\Big|_{-\alpha}^{\alpha}}, \qquad (2.36)$$

deci:

$$x'_G = O'G = \frac{2}{3}\frac{R\sin\alpha}{\alpha} \text{ cu } \alpha \text{ în radiani.} \qquad (2.37)$$

În cazul particular al plăcii în formă de semicerc când $\alpha = \frac{\pi}{2}$, avem:

$$x'_G = O'G = \frac{4R}{3\pi}. \qquad (2.38)$$

c. Volume materiale omogene

1. Paralelipipedul omogen

Fie un paralelipiped omogen de laturi a, b şi c. Centrul de masă se află la jumătatea lungimii laturilor (fig. 2.9.).

2. Cilindrul circular drept omogen

Fie un cilindru omogen circular drept de rază R şi înălţime H. Centrul

de masă se află pe axa de simetrie la jumătatea înălțimii (fig. 2.10.).

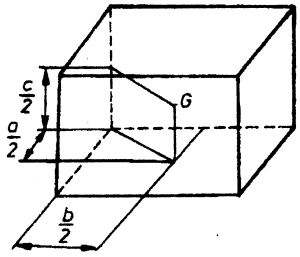

fig. 2.9.

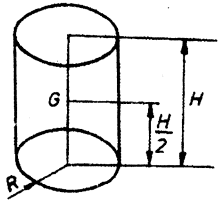

fig. 2.10.

3. Conul omogen circular drept

Fie un con omogen circular drept de rază R şi de înălțime H. Centrul de masă se află pe axa de simetrie la distanța $\frac{H}{4}$ față de bază (fig. 2.11.). Alegând ca axă de simetrie axa $O'z'$, atunci se poate scrie:

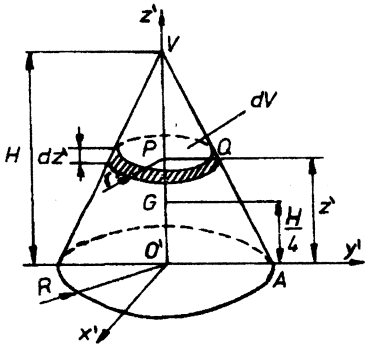

fig. 2.11.

$$z'_G = O'G = \frac{\int z'dV}{\int dV}. \qquad (2.39)$$

Ca volum elementar dV este considerat un trunchi de con rezultat prin intersecția conului cu două plane paralele cu baza acestuia situate la înălțimea z' şi $z'+dz'$, adică între ele este distanța dz'. Acest trunchi de con se aproximează cu un cilindru circular drept de rază r şi înălțime dz', deci volumul său va fi:

$$dV = \pi r^2 dz'. \qquad (2.40)$$

Din asemănarea triunghiurilor VPQ şi VO'A (fig. 2.11.), rezultă:

$$r = \frac{R}{H}(H - z'). \qquad (2.41)$$

Acum se poate calcula z'_G cu integrale simple:

$$z'_G = \frac{\int_0^H z' \cdot \pi \cdot \frac{R^2}{H^2}(H-z')^2 dz'}{\int_0^H \pi \cdot \frac{R^2}{H^2}(H-z')^2 dz'} = \frac{\int_0^H z' \cdot (H^2 - 2Hz' + z'^2) dz'}{\int_0^H (H^2 - 2Hz' + z'^2) dz'} = \frac{\frac{H^4}{12}}{\frac{H^3}{3}} = \frac{H}{4}. \quad (2.42)$$

Observaţie:

În cazul conului circular care nu este drept sau al piramidei, centrul de masă se găseşte într-un plan paralel cu baza şi situat la o distanţă faţă de vârf egală cu $\frac{3}{4}$ din înălţimea corpului şi, prin urmare, o distanţă faţă de bază egală cu $\frac{1}{4}$ din înălţimea acestuia.

4. Segmentul sferic omogen

Fie o sferă omogenă de rază R şi un reper cu polul O' ales în centrul sferei. Se consideră segmentul sferic obţinut prin intersecţia ei cu două plane paralele cu planul $x'O'y'$ şi situate la cotele $z' = H_1$ şi respectiv $z' = H_2$ (fig.2.12.). Deoarece $O'z'$ este axă de simetrie a segmentului sferic, rezultă:

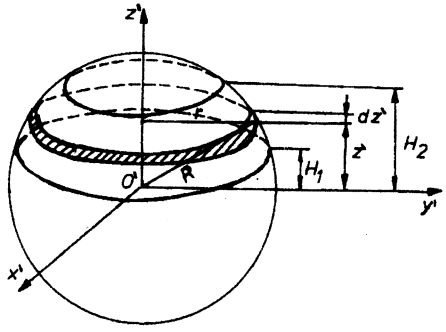

fig. 2.12.

$$x'_G = 0,\ y'_G = 0, \quad (2.43)$$

dar

$$z'_G = \frac{\int z' dV}{\int dV}. \quad (2.44)$$

Se consideră un volum elementar format dintr-un segment sferic obţinut prin intersecţia cu sfera a două plane paralele cu planul $x'O'y'$ şi situate la distanţa dz'. Acest segment sferic se aproximează cu un cilindru având raza r şi înălţimea dz', prin urmare se poate scrie (fig. 2.12.):

$$dV = \pi r^2 dz' = \pi(R^2 - z'^2)dz' . \qquad (2.45)$$

Cu aceste relații, calculul poziției centrului de masă se face cu integrale simple:

$$z'_G = \frac{\int_{H_1}^{H_2} z'\pi(R^2 - z'^2)dz'}{\int_{H_1}^{H_2} \pi(R^2 - z'^2)dz'} = \frac{\int_{H_1}^{H_2} [R^2 z' - z'^3]dz'}{\int_{H_1}^{H_2} (R^2 - z'^2)dz'} = \frac{R^2 \cdot \frac{H_2^2 - H_1^2}{2} - \frac{H_2^4 - H_1^4}{4}}{R^2(H_2 - H_1) - \frac{H_2^3 - H_1^3}{3}}, \qquad (2.46)$$

de unde:

$$z'_G = \frac{3(H_1 + H_2)[2R^3 - (H_1^2 + H_2^2)]}{4[3R^2 - (H_1^2 + H_1 H_2 + H_2^2)]} . \qquad (2.47)$$

Relația de mai sus se poate particulariza pentru calota sferică la care $H_1 = H$ şi $H_2 = R$. În cazul emisferei $H_1 = 0$ şi $H_2 = R$, rezultă:

$$z'_G = \frac{3}{8} R . \qquad (2.48)$$

2.5. Teoremele lui Guldin-Pappus

Se consideră un arc de curbă omogen AB de lungime L situat în planul xOy şi fie G centrul său de masă (fig. 2.13).

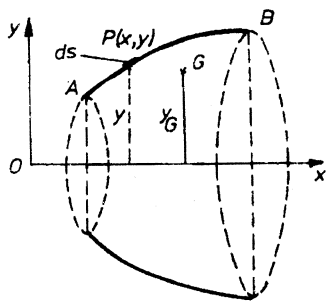

fig. 2.13.

Teorema I. Aria suprafeței descrisă de un arc de curbă plană care se roteşte în jurul unei axe pe care nu o intersectează este egală cu lungimea arcului de curbă înmulțită cu lungimea circumferinței descrise în rotație de centrul de greutate al arcului de curbă:

$$A = L \cdot 2\pi \cdot y_G . \qquad (2.49)$$

Teorema este adevărată şi dacă punctele A şi B sau numai unul dintre ele se află pe axa de rotaţie, curba AB fiind situată în întregime de aceeaşi parte a axei (fig. 2.13.).

Fie Ox axa de rotaţie şi P un punct pe curbă de coordonate (x,y). Elementul de arie dA generat prin rotirea arcului ds este aria laterală a unui cilindru de rază y şi înălţime ds. Rezultă:

$$A = \int_{(A)} dA = \int_{(L)} 2 \cdot \pi \cdot y \cdot ds = 2\pi \int_{(L)} y ds = 2\pi L y_G, \tag{2.50}$$

deoarece

$$y_G = \frac{\int_{(L)} y ds}{L}, \tag{2.51}$$

ceea ce demonstrează teorema.

Fie o suprafaţă plană omogenă de arie A situată în planul xOy şi fie G centrul său de masă (fig. 2.14.).

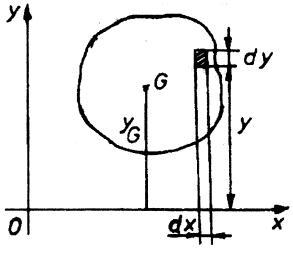

fig. 2.14.

Teorema II. Volumul corpului de rotaţie descris de o suprafaţă plană care se roteşte în jurul unei axe exterioare ei sau care se găseşte pe o porţiune de frontieră a ei, este egală cu aria A a suprafeţei considerate înmulţită cu lungimea circumferinţei descrise de centrul de greutate al ariei, presupusă omogenă:

$$V = A \cdot 2\pi y_G \tag{2.52}$$

Prin rotirea ariei A în jurul axei Ox se obţine un corp de revoluţie cu volumul $V = \int_{(V)} dV$. Elementul de volum dv generat prin rotirea ariei $dA = dx\,dy$ în jurul axei Ox rezultă din diferenţa volumelor generate de doi cilindri de înălţime dx şi de raze y şi respectiv y+dy (fig. 2.14.). Rezultă:

$$dv = \pi(y+dy)^2 dx - \pi y^2 dx = 2\pi y dx dy + \pi dy^2 dx . \qquad (2.53)$$

Neglijând ultimul termen, se obține:

$$V = \int_{(V)} dv = \int_{(A)} 2\pi y dA = 2\pi \int_{(A)} y dA = 2\pi \cdot A \cdot y_G , \qquad (2.54)$$

deoarece

$$y_G = \frac{\int_{(A)} y dA}{A} . \qquad (2.55)$$

Observație:

Teoremele rămân valabile şi atunci când rotirea se fac cu un unghi oarecare φ exprimat în radiani:

$$A = L \cdot \varphi \cdot y_G , \; V = A \cdot \varphi \cdot y_G . \qquad (2.56)$$

2.6. Centrul de masă al corpurilor omogene cilindrice şi prismatice drepte cu secțiune transversală oarecare

Fie un poligon sau o curbă plană închisă şi o dreaptă (Δ) perpendiculară pe planul poligonului sau al curbei. Dreapta (Δ) va descrie o suprafață riglată prin deplasarea pe conturul poligonului sau curbei. Un corp cilindric sau prismatic drept se obține secționând suprafața rezultată cu două plane paralele şi perpendiculare pe dreapta (Δ).

Fie un astfel de corp omogen de înălțime H (fig. 2.15.). Considerăm un reper astfel încât planul $x'O'y'$ să fie plan de simetrie. Rezultă că centrul de masă al corpului se află în acest plan, deci $z'_G = 0$.

Se consideră volumul elementar dV format dintr-un paralelipiped cu

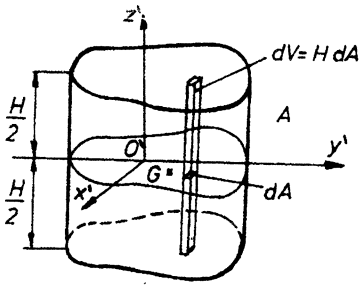

fig. 2.15.

baza dA şi de înălţime H (fig. 2.15.). Vectorul de poziţie $\vec{r}'_G$ se calculează cu relaţia:

$$\vec{r}'_G = \frac{\int_{(V)} \vec{r}' dV}{\int_{(V)} dV} = \frac{\int_{(A)} \vec{r}' H dA}{\int_{(A)} H dA} = \frac{\int_{(A)} \vec{r}' dA}{\int_{(A)} dA}. \quad (2.57)$$

Ţinând cont că $G \in x'O'y'$, rezultă că:

$$x'_G = \frac{\int_{(A)} x' dA}{A}, \quad y'_G = \frac{\int_{(A)} y' dA}{A}, \quad (2.58)$$

ceea ce arată că centrul de masă al corpului coincide cu centrul de masă al ariei secţiunii transversale.

Centrul de masă al corpurilor omogene cilindrice şi prismatice drepte cu secţiune transversală oarecare coincide cu centrul de masă al secţiunii transversale mediane considerată ca placă plană omogenă..

2.7. Centrul de masă al sistemelor de solide rigide

Fie un sistem arbitrar de solide rigide S_i (i = 1,2,...,n) având fiecare masa M_i (i = 1,2,...,n) şi centrul de masă G_i (i = 1,2,...,n) determinat în raport cu un pol O prin vectorul de poziţie $\vec{r}_{G_i}$ (i = 1,2,...,n). Masa totală a sistemului, notată cu M, este suma maselor corpurilor:

$$M = \sum_{i=1}^{i=n} M_i . \quad (2.59)$$

Centrul de masă al sistemului, notat cu G, are poziţia determinată de vectorul de poziţie $\vec{r}_G$ dat de:

$$\vec{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \vec{r}_{G_i} M_i}{\sum_{i=1}^{i=n} M_i} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \vec{r}_{G_i} M_i}{M}. \qquad (2.60)$$

2.8. Aplicații

1. Să se determine poziția centrului de masă din figura 2.16, format din bare omogene.

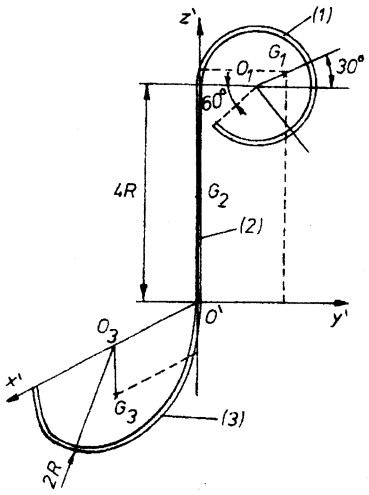

fig. 2.16.

Pentru rezolvarea unei probleme de determinare a poziției centrului de mas, se parcurg în ordine câteva etape.

1) Mai întâi se observă dacă corpul nu are simetrii. De obicei, dacă corpul are o axă de simetrie, una din axele reperului în raport cu care se va calcula poziția centrului de masă va coincide cu axa de simetrie iar dacă are un plan de simetrie, unul din planele de coordonate va coincide cu planul de simetrie. În cazul de față, corpul nu are simetrii.

2) Etapa a doua constă în alegerea poziției unui reper cartezian $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ atașat de corp ales acum așa cum se poate vedea în fig. 2.16.

3) Etapa a treia constă în împărțirea corpului în zone simple al căror centru de masă se poate calcula cu ușurință, marcându-se pe desen poziția aproximativă a centrului de masă al fiecărei zone. În cazul de față corpul are trei zone simple:

a) zona formată dintr-o bară sub formă de arc de cerc având unghiul

la centru de 300^0 $\left(\frac{5\pi}{3}\text{ radiani}\right)$ situată în planul $y'O'z'$ şi centrul de masă G_1 aflat pe bisectoarea unghiului la centru.

b) zona a doua formată dintr-o bară de lungime 4R coliniară cu axa $O'z'$ şi având centrul de masă G_2 la jumătatea lungimii.

c) zona a treia formată dintr-o bară semicirculară situată în planul $x'O'z'$ având centrul de masă G_3 situat pe bisectoarea unghiului la centru.

4) Se calculează, în etapa a patra, coordonatele centrului de masă al fiecărei zone simple.

Pentru zona unu, se poate calcula segmentul O_1G_1 cu formula (2.28) în care $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ rad.

$$O_1G_1 = R\frac{\sin\frac{5\pi}{6}}{\frac{5\pi}{6}} = R\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5\pi}{6}} = \frac{3R}{5\pi}.$$

Coordonata $x'_{G_1} = 0$ deoarece zona este situată în planul $y'O'z'$. Coordonata y'_{G_1} este:

$$y'_{G_1} = R + O_1G_1\cos\frac{\pi}{6} = R + \frac{3R}{5\pi}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{10\pi}\right)R.$$

Coordonata z'_{G_1} este:

$$z'_{G_1} = 4R + O_1G_1\sin\frac{\pi}{6} = 4R + \frac{3R}{5\pi}\cdot\frac{1}{2} = \left(4 + \frac{3}{10\pi}\right)R.$$

Lungimea barei este $\frac{5}{6}$ din circumferinţa unui cerc de rază R:

$$L_1 = \frac{5\pi}{3}R.$$

Pentru zona a doua $x'_{G_2} = 0$ şi $y'_{G_2} = 0$ deoarece G_2 se află pe axa $O'z'$. Coordonata z'_{G_2} este:

$$z'_{G_2} = 2R,$$

iar lungimea $L_2 = 4R$.

Zona a treia fiind situată în planul $x'O'z'$, care $y'_{G_3} = 0$, iar celelalte două coordonate sunt:

$$x'_{G_3} = 2R, \quad z'_{G_3} = -2R\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4R}{\pi}.$$

Lungimea barei semicirculare de rază 2R este:

$$L_3 = 2\pi R.$$

5) În ultima etapă se calculează coordonatele centrului de masă G al corpului cu formulele (2.25):

$$x'_G = \frac{2R \cdot 2\pi R}{\frac{5\pi}{3}R + 4R + 2\pi R} = \frac{12\pi}{11\pi + 12} \cdot R \approx 0{,}81\ R;$$

$$y'_G = \frac{\left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{10\pi}\right)R \cdot \frac{5\pi}{3}R}{\frac{5\pi}{3}R + 4R + 2\pi R} = \frac{10\pi + 3\sqrt{3}}{2(11\pi + 12)} \cdot R \approx 0{,}39\ R;$$

$$z'_G = \frac{\left(4 + \frac{3}{10\pi}\right)R \cdot \frac{5\pi}{3}R + 2R \cdot 4R - \frac{4R}{\pi} \cdot 2\pi R}{\frac{5\pi}{3}R + 4R + 2\pi R} = \frac{40\pi + 3}{2(11\pi + 12)} \cdot R \approx 1{,}38\ R.$$

Se observă că centrul de masă nu este neapărat un punct aparţinând corpului.

Rezultatele de mai sus se scriu adesea sintetic într-un tabel de forma:

Nr. crt.	x'_{G_i}	y'_{G_i}	z'_{G_i}	L_i	$x'_{G_i} L_i$	$y'_{G_i} L_i$	$z'_{G_i} L_i$
1.	0	$\frac{10\pi+3\sqrt{3}}{2(11\pi+12)}R$	$\frac{40\pi+3}{10\pi}R$	$\frac{5\pi}{3}R$	0	$\frac{10\pi+3\sqrt{3}}{6}R^2$	$\frac{40\pi+3}{6}R^2$
2.	0	0	2R	4R	0	0	$8R^2$
3.	2R	0	$-\frac{4R}{\pi}$	$2\pi R$	$4\pi R^2$	0	$-8R^2$
Σ	–	–	–	$\frac{11\pi+12}{3}R$	$4\pi R^2$	$\frac{10\pi+3\sqrt{3}}{6}R^2$	$\frac{40\pi+3}{6}R^2$

Coordonatele centrului de masă se calculează acum foarte simplu făcând raportul căsuțelor de pe ultimul rând:

$$x'_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x'_{G_i} L_i}{\sum_{i=1}^{i=n} L_i} = \frac{4\pi R^2}{\frac{11\pi+12}{3}R} = \frac{12\pi}{11\pi+12}\cdot R\,;$$

$$y'_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} y'_{G_i} L_i}{\sum_{i=1}^{i=n} L_i} = \frac{\frac{10\pi+3\sqrt{3}}{6}R^2}{\frac{11\pi+12}{3}R} = \frac{10\pi+3\sqrt{3}}{2(11\pi+12)}\cdot R\,;$$

$$z'_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} z'_{G_i} L_i}{\sum_{i=1}^{i=n} L_i} = \frac{\frac{40\pi+3}{6}R^2}{\frac{11\pi+12}{3}R} = \frac{40\pi+3}{2(11\pi+12)}\cdot R\,.$$

2. Se consideră placa plană omogenă din fig. 2.17. Se cere să se determine lungimea segmentelor a şi b astfel încât să fie verificate simultan condiţiile:

a) centrul de greutate al plăcii să fie punctul O;

b) aria dreptunghiului care se scoate să fie maximă.

Placa are o axă de simetrie verticală care se alege ca axă $O'y'$ a sistemului de coordonate. Polul O' se alege în punctul O, iar axa $O'x'$ rezultă ca în figură. Suprafața plăcii este împărțită cu trei zone simple: zona unu triunghiul, zona doi discul semicircular şi zona trei dreptunghiul care se scoate. Deoarece axa $O'y'$ este axă de simetrie, centrul de masă G al plăcii se află pe această axă, deci avem $x'_G = 0$. Trebuie acum calculată ordonata centrului de masă a fiecărei zone şi aria fiecărei zone. Pentru zona unu, care este un triunghi, avem:

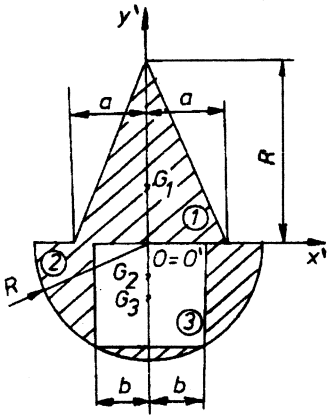

fig. 2.17.

$$y'_{G_1} = \frac{R}{3} \text{ şi } A_1 = aR.$$

Zona a doua este o placă semicirculară şi avem:

$$y'_{G_2} = -\frac{2}{3}R\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4R}{3\pi} \text{ şi } A_2 = \frac{\pi R^2}{2}.$$

Zona a treia este un dreptunghi de laturi 2b şi $\sqrt{R^2 - b^2}$ şi, prin urmare, rezultă:

$$y'_{G_3} = -\frac{\sqrt{R^2 - b^2}}{2} \text{ şi } A_3 = -2b\sqrt{R^2 - b^2}.$$

Aria A_3 are semnul minus pentru că ea se scoate şi va intra în formula (2.24) cu acest semn, rezultând:

$$y'_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=3} y'_{G_i} A_i}{\sum_{i=1}^{i=3} A_i} = \frac{\frac{R}{3}\cdot aR + \left(-\frac{4R}{3\pi}\right)\frac{\pi R^2}{2} + \left(-\frac{\sqrt{R^2 - b^2}}{2}\right)\left(-2b\sqrt{R^2 - b^2}\right)}{aR + \frac{\pi R^2}{2} - 2b\sqrt{R^2 - b^2}},$$

adică:

$$y'_G = \frac{aR^2 - 2R^3 + 3bR^2 - 3b^3}{3\left(aR + \frac{\pi R^2}{2} - 2b\sqrt{R^2 - b^2}\right)}.$$

Pentru ca centrul de masă să fie în O trebuie impusă condiția $y'_G = 0$, care revine la:

$$aR^2 - 2R^3 + 3bR^2 - 3b^3 = 0,$$

care este o ecuație algebrică cu două necunoscute: a şi b.

Pentru a obține încă o ecuație, se calculează extremul ariei dreptunghiului derivând formula de calcul a lui A_3 în raport cu b şi apoi egalând cu zero derivata. Fie deci funcția:

$$A_3 = f(b) = 2b\sqrt{R^2 - b^2}.$$

Derivata ei este:

$$f'(b) = \frac{2(R^2 - 2b^2)}{\sqrt{R^2 - b^2}},$$

deci rădăcina derivatei întâi este un punct de maxim al funcției f(b) deci al ariei A_3, aşa cum rezultă din monotonia funcției f(b) sau din calculul derivatei a doua.

Înlocuind $b = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ în prima ecuație, rezultă cealaltă necunoscută:

$$a = \frac{R}{4}(8 - 3\sqrt{2}).$$

Mărimea maximă a ariei extrase este:

$$A_{3_{max}} = 2 \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = R^2.$$

3. Să se determine centrul de masă al corpului omogen din fig. 2.18.

Corpul are un plan de simetrie care coincide, aşa cum se vede în fig.2.18, cu planul $y'O'z'$. Există trei zone simple. Zona întâia este formată dintr-un semicilindru de rază a şi înălţime 2a, zona a doua este formată dintr-un cilindru de rază a şi înălţime 2a iar zona a treia este formată dintr-o emisferă de rază 2a. Zona întâia face parte din categoria corpurilor cilindrice şi prismatice drepte având secţiunea transversală un semicerc. Centrul de masă este la jumătatea înălţimii semicilindrului şi coincide cu centrul de masă al semicercului median.

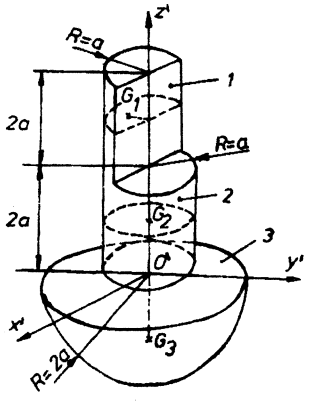

fig. 2.18.

Nr. crt.	y'_{G_i}	z'_{G_i}	V_i	$y'_{G_i} V_i$	$z'_{G_i} V_i$
1	$-\frac{4a}{3\pi}$	3a	πa^3	$-\frac{4a^4}{3}$	$3\pi a^4$
2	0	a	$2\pi a^3$	0	$2\pi a^4$
3	0	$-\frac{3}{4}a$	$\frac{16\pi a^3}{3}$	0	$-4\pi a^4$
Σ	–	–	$\frac{25\pi a^3}{3}$	$-\frac{4a^4}{3}$	πa^4

Coordonata x'_G a centrului de masă este nulă deoarece $y'O'z'$ este plan de simetrie al corpului, deci centrul de masă se află în acest plan, rezultând:

$$x'_G = 0$$

Celelalte două coordonate sunt:

$$y'_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=3} y'_{G_i} V_i}{\sum_{i=1}^{i=3} V_i} = \frac{-\frac{4a^4}{3}}{\frac{25\pi a^3}{3}} = -\frac{4}{25\pi} a ;$$

$$z'_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=3} z'_{G_i} V_i}{\sum_{i=1}^{i=3} V_i} = \frac{\pi a^4}{\frac{25\pi a^3}{3}} = \frac{3}{25} a .$$