11. DINAMICA MIȘCĂRII ABSOLUTE A PUNCTULUI MATERIAL

11. 1. Considerații generale

Punctul material este definit ca un punct geometric care are o anumită masă. Lucrarea fundamentală care a pus bazele studiului dinamicii punctului material este ”Principiile matematice ale filozofiei naturale” (”Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica”) scrisă de marele fizician englez Isaac Newton (1643-1727) în anul 1687. În această lucrare au fost enunțate elementele definitorii ale modelului matematic de punct material. Prin model matematic se înțelege un sistem de noțiuni și axiome (denumite și principii, postulate sau legi) care caracterizează cantitativ un fenomen. Adevărul declarat de o axiomă se verifică exclusiv experimental. Modelul matematic de punct material presupune existența unui reper inerțial adică a unui reper aflat în repaus sau în mișcare rectilinie și uniformă și a unei cronologii în cadrul căreia, în mecanica clasică numită și mecanică Newtoniană, se consideră că simultaneitatea, succesiunea și durata în timp a unor fenomene sunt independente de locul desfășurării fenomenului, de momentul desfășurării fenomenului și de localizarea observatorului. În acest context, se afirmă, pe baza experimentelor efectuate, că sunt valabile următoarele principii:

1. Principiul inerției: un punct material își păstrează starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă atâta timp cât asupra lui nu acționează vreo forță care să-i schimbe starea în care se află.

2. Legea a II-a a lui Newton. Derivata în raport cu timpul a impulsului unui punct material este egală cu forța care acționează asupra acestuia. Impulsul unui punct material, denumit de Newton și cantitate de mișcare, este un vector notat cu $\overline{H}$ și definit ca produsul dintre masa punctului și viteza sa:

$$\overline{H} = m\overline{v} \,. \tag{11.1}$$

Legea a II-a a lui Newton se scrie acum:

$$\overline{F} = \frac{d\overline{H}}{dt} \,. \tag{11.2}$$

Pe de altă parte, derivata în raport cu timpul a impulsului este:

$$\frac{d\overline{H}}{dt} = \frac{dm}{dt}\overline{v} + m\frac{d\overline{v}}{dt} \tag{11.3}$$

Deoarece masa punctului se consideră a fi constantă în decursul timpului, atunci derivata acesteia în raport cu timpul se anulează. Ținând cont că derivata vectorului viteză este tocmai vectorul accelerație $\overline{a}$, se obține în final, din relațiile (11.2) și (11.3), formula cunoscută:

$$\vec{F} = m\overline{a} \,, \tag{11.4}$$

care se consideră adesea ca fiind legea a II-a a lui Newton.

Pot exista situații în care masa punctului nu este constantă în decursul timpului cum ar fi, de exemplu, cazul mișcării unei rachete care pierde din masa sa prin eliminarea combustibilului ars. În astfel de cazuri, pentru a studia dinamica mișcării, se folosește formula (11.3).

3. Principiul acțiunii și reacțiunii. Acțiunile reciproce a două puncte materiale sunt totdeauna egale, coliniare și orientate în sensuri opuse (Fig. 11.1).

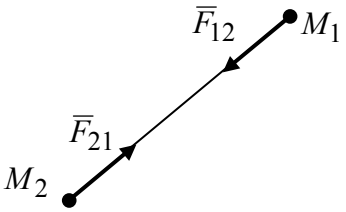

Fig. 11.1 Acțiunile reciproce a două puncte materiale.

Fie M_1 și M_2 două puncte materiale care interacționează. Se notează cu $\overline{F}_{12}$ forța cu care punctul M_2 acționează asupra punctului M_1 și cu $\overline{F}_{21}$ forța cu care punctul M_1 acționează asupra punctului M_2. Conform acestui principiu are loc relația:

$$\overline{F}_{12} + \overline{F}_{21} = 0. \qquad (11.5)$$

Forțele $\overline{F}_{12}$ și $\overline{F}_{21}$ sunt coliniare, egale ca mărime și au sensuri contrare, dar fiecare dintre ele acționează asupra altui punct material.

4. Principiul independenței acțiunii forțelor sau principiului paralelogramului Dacă asupra unui punct acționează două forțe atunci punctul are aceeași mișcare ca și când asupra sa acționează o singură forță egală cu diagonala paralelogramului ale cărui laturi sunt cele două forțe. Acest principiu precizează de fapt modul în care se sumează grafic doi vectori. Dacă se consideră că asupra punctului acționează simultan două forțe $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$ (după cum se arată în Fig. 11.2), atunci forța rezultantă $\overline{R}$ egală cu diagonala paralelogramului ale cărui laturi sunt cele două forțe produce, acționând singură în condiții identice, același efect mecanic asupra punctului ceea ce conduce la egalitatea:

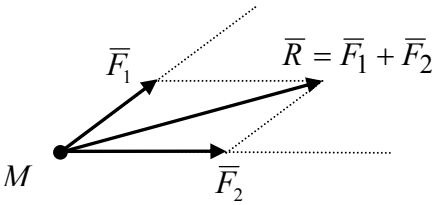

Fig.11.2. Ilustrarea principiului paralelogramului

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2. \qquad (11.6)$$

11. 2. Formularea problemei de dinamica punctului material

Dacă un punct material este supus acțiunii unui sistem de n forțe $\overline{F}_i$ $(i = 1,...,n)$ ele pot fi sumate folosind succesiv regula paralelogramului astfel că, în final, se obține o unică forță rezultantă

$$\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \cdots + \overline{F}_n = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{F}_i, \qquad (11.7)$$

care înlocuiește toate cel n forțe care acționau inițial asupra punctului. Vectorul de poziție al punctului în raport cu un reper inerțial este:

$$\bar{r} = \bar{r}(t)\,, \tag{11.8}$$

iar viteza și accelerația sunt:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}}\,, \tag{11.9}$$

respectiv:

$$\bar{a} = \ddot{\bar{r}}\,. \tag{11.10}$$

Forța rezultantă care acționează asupra punctului dată de relația (11.7), se admite că depinde, în cazul general, de vectorul de poziție $\bar{r}$, de viteza $\bar{v}$ și de timpul t. Aplicând legea a II-a a lui Newton, ecuația diferențială de mișcare a punctului se scrie:

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F}(\bar{r}, \bar{v}, t)\,, \tag{11.11}$$

care, împreună cu condițiile inițiale care înseamnă poziția și viteza punctului în momentul inițial $t = t_0$ când începe studierea mișcării punctului material, adică:

$$\begin{cases} \bar{r}(t_0) = \bar{r}_0 \\ \dot{\bar{r}}(t_0) = \bar{v}_0 \end{cases} \tag{11.12}$$

formează problema lui Cauchy în dinamica punctului. Rezolvarea problemei Cauchy presupune integrarea ecuației (11.11) în condițiile inițiale (11.12) și obținerea legii de mișcare (11.8). În mecanica clasică condițiile de existență și unicitate ale soluției sunt de regulă satisfăcute astfel că rezultă o unică lege de mișcare.

Problema Cauchy poate fi formulată în diverse sisteme de coordonate, rezultând un sistem de ecuații diferențiale scalare împreună cu condițiile inițiale aferente obținute prin proiectarea pe axele reperului ales a relațiilor (11.11) și (11.12). De exemplu, în cazul unui reper cartezian ortogonal drept $R(O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$, problema Cauchy are forma:

$$m\,\ddot{x} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \tag{11.13}$$

$$m\,\ddot{y} = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \tag{11.14}$$

$$m\,\ddot{z} = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \tag{11.15}$$

$$x(0) = x_0 \qquad \dot{x}(0) = v_{0x} \tag{11.16}$$

$$y(0) = y_0 \qquad \dot{y}(0) = v_{0y} \tag{11.17}$$

$$z(0) = z_0 \qquad \dot{z}(0) = v_{0z} \tag{11.18}$$

unde x_0, y_0, z_0 sunt coordonatele punctului la momentul inițial $t = 0$ iar v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} sunt proiecțiile vitezei inițiale $\bar{v}(0) = \bar{v}_0$ pe axele reperului. Soluția acestei probleme înseamnă determinarea legilor de mișcare

$$x = x(t),\;\; y = y(t),\;\; z = z(t),. \tag{11.19}$$

În cazul unui reper polar, problema Cauchy are forma:

$$m(\ddot{r} - \dot{r}\theta^2) = F_r(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, t), \tag{11.20}$$

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = F_\theta(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, t), \tag{11.21}$$

$$r(0) = r^0, \qquad \dot{r}(0) = v_r^0, \tag{11.22}$$

$$\theta(0) = \theta^0, \qquad r(0) \cdot \dot{\theta}(0) = v_\theta^0, \tag{11.23}$$

unde r^0 și θ^0 sunt coordonatele punctului la momentul inițial $t = 0$, iar v_r^0 și v_θ^0 reprezintă proiecțiile vitezei inițiale $\bar{v}(0) = \bar{v}_0$ pe axele reperului polar. Soluția problemei Cauchy însemnă determinarea legilor de mișcare $r = r(t)$ și $\theta = \theta(t)$.

În cazul unui reper Serret-Frenet, problema Cauchy are forma:

$$m\ \ddot{s} = F_\tau(s, \dot{s}, t), \tag{11.24}$$

$$m\ \frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_\nu(s, \dot{s}, t), \tag{11.25}$$

$$s(0) = s_0, \quad \dot{s}(0) = v_0, \tag{11.26}$$

unde s_0 este coordonata intrinsecă a punctului la momentul inițial $t = 0$, iar v_0 este viteza punctului în același moment.

În cazul utilizării coordonatelor sferice, problema Cauchy are forma

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) = F_r(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, t), \tag{11.27}$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta) = F_\theta(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, t), \tag{11.28}$$

$$m(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta) = F_\varphi(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, t), \tag{11.29}$$

$$r(0) = r_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \dot{r}(0) = v_r^0, \quad r_0\dot{\varphi}(0)\sin\theta_0 = v_\varphi^0, \quad r_0\dot{\theta}(0) = v_\theta^0. \tag{11.30}$$

Un alt tip de problemă de dinamica punctului este aceea în care se cunoaște mișcarea punctului și se dorește determinarea forțelor care acționează asupra acestuia determinându-i mișcarea.

11.3. Teorema impulsului în dinamica punctului material

Se consideră un punct material având masa m și vectorul de poziție $\bar{r}$ în raport cu un reper inerțial. Punctul se mișcă sub acțiunea unui sistem de forțe concurente având rezultanta $\bar{F}$. Prin definiție, impulsul punctului material este un vector legat aplicat în punct, notat de regulă cu $\bar{H}$ și care se calculează cu relația:

$$\bar{H} \overset{def.}{=} m\bar{v}. \tag{11.31}$$

Dacă se derivează relația (11.31) în raport cu timpul și se ține cont de faptul că masa este constantă, se obține

$$\dot{\overline{H}} = m\overline{a} \,. \tag{11.32}$$

Pe de altă parte, considerând lege a II-a a lui Newton $m\overline{a} = \overline{F}$, din (11.32) se obține:

$$\dot{\overline{H}} = \overline{F} \,. \tag{11.33}$$

Această relație exprimă <u>teorema impulsului</u>: derivata în raport cu timpul a impulsului unui punct material este egală cu forța rezultantă $\overline{F}$ care acționează asupra acelui punct.

În cazul particular în care $\overline{F}$=0 într-un interval de timp, din (11.33) rezultă că impulsul este constant:

$$\overline{H} = \overline{H}_0 = \overline{\text{constant}} \,. \tag{11.34}$$

Această relație exprima <u>legea de conservare a impulsului</u> și ea conduce la formula:

$$m\overline{v} = m\overline{v}_0 \,, \tag{11.35}$$

unde $\overline{v}_0$ este viteza punctului în momentul în care s-a anulat forța rezultantă $\overline{F}$ ce acționa asupra punctului. După simplificarea masei punctului în egalitatea (11.35) rezultă că:

$$\overline{v} = \overline{v}_0 \,. \tag{11.36}$$

În concluzie, în intervalul de timp cât forța rezultantă este nulă, impulsul se conservă iar viteza punctului este constantă. Prin urmare, în acel interval de timp, dacă $\overline{v}_0 \neq 0$ punctul se mișcă rectiliniu și uniform cu viteza $\overline{v}_0$ iar dacă $\overline{v}_0 = 0$ punctul va rămâne în repaus.

Prin proiectarea pe axele unui reper *Oxyz* a relației (11.33), rezultă următoarele trei relații scalare:

$$\dot{H}_x = F_x, \quad \dot{H}_y = F_y, \quad \dot{H}_z = F_z \,. \tag{11.37}$$

Dacă pe una sau două direcții se anulează componentele forței rezultante într-un interval de timp, atunci impulsul se conservă numai pe acele direcții. De exemplu, dacă $F_x = 0$ într-un interval de timp, atunci în acel interval de timp, din (11.37), rezultă $\dot{H}_x = 0$, deci $H_x = mv_x = const = mv_{0_x}$ deci proiecția impulsului pe axa *Ox* se conservă, ceea ce înseamnă că proiecția vitezei punctului pe axa *Ox* este constantă.

Rezultatul utilizării legilor de conservare, atunci când este cazul, conduce la integrale prime. Astfel relația (11.35) reprezintă o integrală primă a mișcării.

11.4. Teorema momentului cinetic în dinamica punctului material

Se consideră un punct material având masa m și vectorul de poziție $\overline{r}$ în raport cu un reper fix având polul *O*. Punctul se mișcă sub acțiunea unui sistem de forțe concurente având rezultanta

$\overline{F}$ și are impulsul $\overline{H}$. Prin definiție, momentul cinetic al punctului material în raport cu polul *O* este un vector legat aplicat în polul *O*, notat de regulă cu $\overline{K}_O = K_{O_x}\overline{i} + K_{O_x}\overline{j} + K_{O_x}\overline{k}$ și egal cu momentul față de punctul *O* al vectorului impuls:

$$\overline{K}_O \overset{def}{=} \overline{r} \times \overline{H} = \overline{r} \times m\overline{v}\,. \tag{11.38}$$

Dacă se derivează relația (11.38) în raport cu timpul și se ține cont de faptul că masa este constantă, se obține

$$\dot{\overline{K}}_O = \dot{\overline{r}} \times m\overline{v} + \overline{r} \times m\dot{\overline{v}}\,. \tag{11.39}$$

Deoarece $\dot{\overline{r}} = \overline{v}$ primul termen din (11.39) se anulează. În al doilea termen $\dot{\overline{v}} = \overline{a}$ iar produsul $m\overline{a}$ este înlocuit cu $\overline{F}$. Toate acestea conduc la următoarea formă a relației (11.39)

$$\dot{\overline{K}}_O = \overline{r} \times \overline{F} \tag{11.40}$$

Conform teoremei lui Varignon, momentul forței rezultante ce acționează asupra punctului, notat $\overline{M}_O(\overline{F})$, este egal cu momentul rezultant în polul *O* al sistemului de forțe ce acționează asupra punctului, notat $\overline{\mathcal{M}}_O$, adică $\overline{M}_O(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F} = \overline{\mathcal{M}}_O$. Relația (11.40) capătă astfel forma

$$\dot{\overline{K}}_O = \overline{\mathcal{M}}_O \tag{11.41}$$

și reprezintă <u>teorema momentului cinetic</u>: derivata în raport cu timpul a momentului cinetic calculat în raport cu un pol *O* este egală cu momentul rezultant al sistemului de forțe ce acționează asupra punctului material calculat în raport cu același pol *O*.

În mod asemănător cu ceea ce s-a întâmplat în cazul impulsului unui punct material, și aici pot exista situații în care momentul cinetic se conservă. Astfel, dacă vectorul moment rezultant este nul într-un interval de timp, atunci, conform relației (11.41), derivata momentului cinetic se anulează, ceea ce conduce la faptul că, în acel interval de timp, momentul cinetic este constant:

$$\overline{K}_O = \overline{K}_O^0 = K_{O_x}^0\,\overline{i} + K_{O_y}^0\,\overline{j} + K_{O_z}^0\,\overline{k} = \overline{\text{constant}}\,. \tag{11.42}$$

Această relație exprimă <u>legea de conservare a momentului cinetic</u> și ea conduce la egalitatea:

$$\overline{r} \times m\overline{v} = \overline{r}_0 \times m\overline{v}_0 \tag{11.43}$$

care este o integrală primă a mișcării. Vectorii $\overline{r}_0$ și $\overline{v}_0$ reprezintă vectorul de poziție și viteza punctului în momentul anulării vectorului moment rezultant.

În cazul în care se conservă momentul cinetic, pot să apară două situații distincte. Prima situație este caracterizată de faptul că momentul cinetic constant este nul, adică

$$\overline{K}_O^0 = \overline{r}_0 \times m\overline{v}_0 = 0\,. \tag{11.44}$$

În acest caz din relația (11.43) rezultă că $\bar{r} \times m\bar{v} = 0$. Această relație, valabilă în tot intervalul de timp în care $\overline{K}_O^0 = 0$, arată că vectorului de poziție este coliniar cu vectorul viteză în orice moment ceea ce se poate întâmpla numai în cazul unei traiectorii rectilinii.

Cea de a doua situație este caracterizată de faptul că momentul cinetic este constant dar nenul, ceea ce se scrie:

$$K_{O_x}^0 \bar{i} + K_{O_y}^0 \bar{j} + K_{O_z}^0 \bar{k} = \bar{r} \times m\bar{v} \neq 0 \qquad (11.45)$$

Această relație are drept consecință faptul că vectorul moment cinetic este perpendicular atât pe vectorul de poziție $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ cât și pe viteza punctului $\bar{v} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}$. Din acest motiv are loc egalitatea cu zero a următoarelor produse scalare:

$$\overline{K}_O^0 \cdot \bar{r} = K_{O_x}^0 x + K_{O_y}^0 y + K_{O_z}^0 z = 0 \qquad (11.46)$$

și

$$\overline{K}_O^0 \cdot \bar{v} = K_{O_x}^0 \dot{x} + K_{O_y}^0 \dot{y} + K_{O_z}^0 \dot{z} = 0. \qquad (11.47).$$

Coordonatele punctului satisfac relația (11.46) care reprezintă ecuația unui plan care trece prin polul *O*, iar componentele vitezei, conform (11.47), satisfac și ele ecuația acestui plan. Aceste două observații conduc la concluzia că traiectoria punctului este o curbă situată într-un plan care trece prin origine.

Faptul că viteza areolară este $\overline{\Omega} = \frac{1}{2}(\bar{r} \times \bar{v})$ înseamnă, pe baza relației (11.43), că această viteză este constantă dacă are loc conservarea momentului cinetic:

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_0 \qquad (11.48)$$

Prin urmare rezultă că atunci când viteza areolară este constantă, traiectoria punctului este plană.

La fel ca și în cazul impulsului, este posibilă conservarea momentului cinetic numai pe una sau două direcții. De exemplu, să presupunem că pe direcția *Oz* vectorul moment rezultant $\overline{\mathcal{M}}_O = \mathcal{M}_{O_x}\bar{i} + \mathcal{M}_{O_y}\bar{j} + \mathcal{M}_{O_z}\bar{k}$ este nul, adică $\mathcal{M}_{O_z} = 0$ ceea ce arată că momentul axial al vectorului rezultant în raport cu axa *Oz* este nul. Aceasta înseamnă că proiecția momentului cinetic pe direcția axei *Oz* este zero. Prin urmare are loc integrala primă:

$$K_{O_z} = K_{O_z}^0, \qquad (11.49)$$

care se mai scrie:

$$(\bar{r} \times m\bar{v}) \cdot \bar{k} = (\bar{r}_0 \times m\bar{v}_0) \cdot \bar{k}. \qquad (11.50)$$

După simplificarea masei *m*, din (11.50) rezultă egalitatea:

$$(\bar{r} \times \bar{v}) \cdot \bar{k} = (\bar{r}_0 \times \bar{v}_0) \cdot \bar{k} \qquad (11.51)$$

care, având în vedere definiția vitezei areolare, se scrie

$$\Omega_z = \Omega_z^0, \tag{11.52}$$

ceea ce arată că pe direcția axei *Oz* viteza areolară are componentă constantă. Cum direcția axei *Oz* poate fi o direcție oarecare în spațiu după care are loc conservarea momentului cinetic, se poate enunța următoarea proprietate generală: dacă momentul axial al forței rezultante în raport cu o direcție este nul, atunci are loc conservarea momentului cinetic după acea direcție; proiecția punctului pe un plan perpendicular pe direcția conservării momentului cinetic are o mișcare cu viteză areolară constantă.

11.5. Lucrul mecanic, puterea și energia cinetică

În studiul dinamicii se utilizează trei mărimi fizice foarte utile care au un aport deosebit de important pentru facilitatea înțelegerii fenomenelor dinamice și a efectuării calculelor aferente modelării acestor fenomene. Aceste trei mărimi sunt: lucrul mecanic, putere și energia cinetică.

Se consideră un punct material de masă *m* având vectorul de poziție $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ în raport cu un pol fix *O*, viteza $\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}$ și asupra căruia acționează o forță rezultantă $\bar{F} = F_x\bar{i} + F_y\bar{j} + F_z\bar{k}$.

<u>Lucrul mecanic</u> pe care forța $\bar{F}$ îl efectuează deplasând punctul material pe o traiectorie oarecare sau, altfel spus, pe un arc de curbă M_0M_1 este mărimea fizică scalară, notată de regulă cu *L*, definită de integrala:

$$L \overset{def}{=} \int_{M_0M_1} \bar{F}d\bar{r} = \int_{M_0M_1} F_x dx + F_y dy + F_z dz . \tag{11.53}$$

Mărimea de sub semnul integralei reprezintă lucrul mecanic elementar *dL*, care, prin definiție, este

$$dL \overset{def}{=} \bar{F} \cdot d\bar{r} . \tag{11.54}$$

Ținând cont de faptul că $d\bar{r} = \bar{v}dt$, lucrul mecanic elementar se mai poate scrie

$$dL = \int_{t_0}^{t_1} \bar{F} \cdot \bar{v}dt = \int_{t_0}^{t_1} (F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z})dt , \tag{11.55}$$

unde t_0 și t_1 reprezintă momentele în care punctul se află in M_0 respectiv în M_1.

Trebuie remarcat faptul că lucrul mecanic elementar este rezultatul înmulțirii unei mărimi finite $\bar{F}$ cu o mărime infinit mică $d\bar{r}$. Rezultatul obținut în acest mod nu este, în general, o diferențială totală exactă adică nu există întotdeauna o funcție a cărei diferențială să fie *dL*. De aceea, în astfel de cazuri, *dL* trebuie interpretat ca o notație și nu ca o diferențială.

Unitatea de măsură a lucrului mecanic este denumită Joule și are simbolul J. O forță de 1N care parcurge o distanță de 1m efectuează un lucru mecanic de 1J.

Puterea forței $\overline{F}$, notată de regulă cu P, este mărimea fizică scalară definită ca fiind produsul scalar dintre forța rezultantă $\overline{F}$ care acționează asupra punctului și viteza $\overline{v}$ a acestuia:

$$P \overset{def}{=} \overline{F} \cdot \overline{v} . \qquad (11.56)$$

Ținând cont că $\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt}$ și că $dL = \overline{F} d\overline{r}$, din relația (11.56) se obține următoarea relație de legătură între putere și lucrul mecanic:

$$P = \frac{dL}{dt} . \qquad (11.57)$$

Unitatea de măsură a puterii este denumită Watt și are simbolul W. O forță are puterea de 1W adică efectuează un lucru mecanic de 1J într-o secundă. O altă interpretare a unei puteri de 1W este dată de relația (11.56) din care se poate trage concluzia că o forță de 1N care se deplasează cu viteza de 1 m/s are puterea de 1W.

Energia cinetică a unui punct material este mărimea fizică scalară, notată de regulă cu E, definită de relația de calcul:

$$E \overset{def}{=} \frac{1}{2} m \overline{v}^2 . \qquad (11.58)$$

Unitatea de măsură a energiei cinetice este Joule.

11.6. Teorema energiei cinetice

Dacă se derivează în raport cu timpul energia cinetică, atunci se obține:

$$\dot{E} = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt}(\overline{v}^2) = \frac{1}{2} m (2\overline{v} \cdot \dot{\overline{v}}) = (m\dot{\overline{v}}) \cdot \overline{v} = (m\overline{a}) \cdot \overline{v} = \overline{F} \cdot \overline{v} = P \qquad (11.59)$$

adică

$$\dot{E} = P . \qquad (11.60)$$

Relația de mai sus exprimă teorema energiei cinetice: derivata în raport cu timpul a energiei cinetice a unui punct material este egală cu puterea forței rezultante care acționează asupra punctului.

Relația (11.60) se mai poate scrie:

$$dE = Pdt . \qquad (11.61)$$

Ținând cont de relația (11.57) care se scrie $dL = Pdt$, după înlocuirea în (11.61) se obține formula:

$$dE = dL . \qquad (11.62)$$

Relația de mai sus exprimă teorema energiei cinetice sub formă diferențială: diferențiala energiei cinetice a unui punct material este egală cu lucrul mecanic elementar efectuat de forța rezultantă ce acționează asupra punctului.

Relația de mai sus poate fi integrată între două momente t_0 și t_1 obținându-se:

$$\int_{t_0}^{t_1} dE = \int_{t_0}^{t_1} dL\,, \tag{11.63}$$

din care, ținând cont de relațiile (11.53) și (11.55), rezultă:

$$E(t_1) - E(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \overline{F} \cdot \overline{v} dt = \int_{M_O M} \overline{F} \cdot d\overline{r} = L\,. \tag{11.64}$$

Notând energia cinetică din momentul inițial $E(t_0)$ cu E_0 și energia cinetică din momentul final $E(t_1)$ cu E_1, relația (11.64) se scrie

$$E_1 - E_0 = L \tag{11.65}$$

care exprimă teorema energiei cinetice sub formă finită: variația energiei cinetice a punctului material între două momente t_0 și t_1 ale mișcării este egală cu lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă care acționează asupra punctului între aceleași două momente.

11.7. Legea conservării energiei mecanice

În cazul general, forța care acționează asupra unui punct material poate depinde de locul în care se află punctul, de viteza acestuia și de timp. Un caz particular foarte important este acela al forțelor care depind numai de locul în care se află punctul în spațiu, adică al acelor forțe care depind numai de vectorul de poziție al punctului, deci de coordonatele sale. Se consideră un domeniu D din spațiu cu proprietatea că în fiecare punct al său este definită o forță

$$\overline{F} = \overline{F}(x, y, z), \quad x, y, z \in D\,. \tag{11.66}$$

Se spune că în domeniul D este definit un câmp vectorial de forțe. Dacă în fiecare punct al domeniului D este definită o funcție scalară:

$$U = U(x, y, z) \quad x, y, z \in D\,, \tag{11.67}$$

atunci se spune că în domeniul D este definit un câmp scalar.

În cazul în care în fiecare punct din domeniul D există egalitatea:

$$\overline{F}(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\overline{k} = gradU \tag{11.68}$$

atunci funcția scalară $U = U(x, y, z)$ cu $x, y, z \in D$ se numește funcție de forță sau potențial al câmpului vectorial de forțe iar câmpul vectorial de forțe se numește <u>câmp potențial</u> sau <u>câmp conservativ.</u> Notația *gradU* din (11.68) este prescurtarea de la denumirea *gradient al funcției scalare U* care este un operator ce asociază funcției scalare U funcția vectorială

$\frac{\partial U}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\bar{k}$. În condițiile relației (11.68) câmpul vectorial $\overline{F}=\overline{F}(x,y,z)$ cu $x,y,z\in D$ se spune că derivă din funcția de forță $U=U(x,y,z)$ cu $x,y,z\in D$.

Se consideră un punct material care se deplasează într-un câmp de forțe conservativ definit pe un domeniu D pornind la momentul t_0 din punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$ și ajungând la momentul t_1 în punctul $M_1(x_1,y_1,z_1)$. Lucrul mecanic efectuat de forța $\overline{F}=\overline{F}(x,y,z)$ cu $x,y,z\in D$ care determină deplasarea punctului și care derivă din funcția de forță $U=U(x,y,z)$ cu $x,y,z\in D$ se calculează cu relația:

$$L=\int_{M_0M_1}\overline{F}d\overline{r}=\int_{M_0M_1}gradU\cdot d\overline{r}=\int_{M_0M_1}\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz=$$
$$=\int_{M_0M_1}dU=U(x_1,y_1,z_1)-U(x_0,y_0,z_0) \qquad (11.69)$$

Din relația (11.69) rezultă două elemente importante:

a) într-un câmp conservativ lucrul mecanic elementar dL este diferențiala totală exactă a funcției de forță (potențialului) U, adică:

$$dL=dU. \qquad (11.70)$$

b) lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă în timpul deplasării punctului din poziția inițială $M_0(x_0,y_0,z_0)$ în poziția finală $M_1(x_1,y_1,z_1)$ nu depinde de drumul parcurs de punct (deci parcurs și de forța rezultantă) între poziția inițială și cea finală, adică indiferent de forma traiectoriei dintre cele două poziții lucrul mecanic este același.

Funcția de forță U se poate determina până la o constantă arbitrară C, deoarece orice funcție de forma $U+C$ satisface relația (11.69).

Dacă în relația (11.62) înlocuim dL cu dU, atunci rezultă:

$$d(E-U)=0. \qquad (11.71)$$

Funcția V definită de egalitatea :

$$V=-U \qquad (11.72)$$

este denumită energie potențială. Relația (11.71) se scrie acum:

$$d(E+V)=0 \qquad (11.73)$$

Suma dintre energia cinetică E și energia potențială V este energia mecanică a punctului. Deoarece relația (11.73) arată că diferențiala energiei mecanice este zero, rezultă că energia mecanică este constantă:

$$E+V=\text{constant}, \qquad (11.74)$$

Această relație permite următoarea formulare a legii conservării energie mecanice: într-un câmp de forțe conservativ energia mecanică a unui punct material se conservă. Folosirea legii conservării energiei mecanice conduce la o integrală primă.

Valoarea constantă din relația (11.74) se determină din condițiile inițiale, adică dacă punctul este la momentul inițial t_0 în poziția $M_0(x_0, y_0, z_0)$ când are energia mecanică $E_0 + V_0$, atunci în orice altă poziție ulterioară $M(x, y, z)$ energia mecanică $E + V$ a punctului este egală cu cea din momentul inițial:

$$E_0 + V_0 = E + V \,. \tag{11.75}$$

11.7.1. Câmpul conservativ gravitațional

Se consideră un reper inerțial R (O, $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$) situat în câmpul gravitațional al pământului având axa Oz orientată pe verticală în sens opus suprafeței solului și un punct material M care se deplasează numai sub acțiunea greutății proprii, pe o traiectorie oarecare, din poziția $M_0(x_0, y_0, z_0)$ în poziția $M_1(x_1, y_1, z_1)$ (Fig. 11.3).

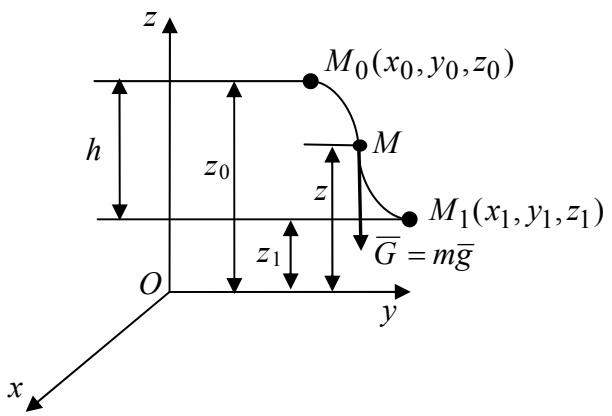

Fig. 11.3 Mișcarea punctului în câmp gravitațional

Greutatea punctului $\overline{G} = m\overline{g} = -mg\bar{k}$ este forța sub acțiunea căreia are loc deplasarea și este aceeași în fiecare poziție a punctului pe traiectorie. Lucrul mecanic elementar este:

$$dL = \overline{G} \cdot d\overline{r} = (-mg\bar{k}) \cdot (dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}) = -mgdz = d(-mgz + C) \tag{11.76}$$

unde C este o constantă arbitrară. Rezultă următoarea formă a funcției de forță corespunzătoare câmpului gravitațional:

$$U(z) = -mgz + C \,. \tag{11.77}$$

Energia potențială a câmpului gravitațional va fi deci:

$$V(z) = mgz - C \,. \tag{11.78}$$

Lucrul mecanic efectuat pe traiectorie între poziția inițială și cea finală a punctului se obține prin integrarea lucrului mecanic elementar:

$$L = \int_{M_0M_1} dL = \int_{M_0M_1} dU = U(z_1) - U(z_0) = -mgz_1 + C - (-mgz_0 + C) = mg(z_0 - z_1) = mgh\,, \quad (11.79)$$

unde cu h s-a notat distanța pe verticală între cele două puncte.

De regulă, în aplicații, constanta C se consideră că are valoarea zero.

11.7.2. Câmpul conservativ de tip forță elastică

Se consideră un reper inerțial R (O, $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$) și un punct material M care se deplasează din poziția $M_0(x_0, y_0, z_0)$ în poziția $M_1(x_1, y_1, z_1)$ numai sub acțiunea unei forțe de tip forță elastică având forma

$$\bar{F} = -k\bar{r}\,, \quad (11.80)$$

adică o forță proporțională cu vectorul de poziție $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ și de sens opus acestuia denumită și forță de atracție, factorul de proporționalitate fiind constanta reală k denumită și constantă elastică. Lucrul mecanic elementar este:

$$dL = \bar{F} \cdot d\bar{r} = -k\,\bar{r}\,d\bar{r} = d(-\frac{1}{2}k\bar{r}^2 + C)\,, \quad (11.81)$$

unde C este o constantă arbitrară. Rezultă următoarea formă a funcției de forță corespunzătoare câmpului conservativ de tip forță elastică:

$$U = -\frac{1}{2}kr^2 + C = -\frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) + C\,. \quad (11.82)$$

Energia potențială a câmpului va fi deci:

$$V = \frac{1}{2}k\bar{r}^2 - C = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) - C\,. \quad (11.83)$$

Lucrul mecanic efectuat pe traiectorie între poziția inițială și cea finală a punctului se obține prin integrarea lucrului mecanic elementar:

$$L = \int_{M_0M_1} dL = \int_{M_0M_1} dU = U(z_1) - U(z_0) = -\frac{1}{2}k\bar{r}_1^2 + C - (-\frac{1}{2}k\bar{r}_0^2 + C) = \frac{1}{2}k(\bar{r}_0^2 - \bar{r}_1^2) \quad (11.84)$$

Există forțe de acest tip care sunt de forma:

$$\bar{F} = +k\bar{r}\,, \quad (11.85)$$

care sunt denumite forțe de respingere. Pentru ele se obțin rezultate analoage cu cele de mai sus, diferența constând în inversarea semnului.

De regulă, în aplicații, constanta C se consideră că are valoarea zero.

Un caz particular foarte des întâlnit este cel al arcului elastic de întindere-compresiune având constanta elastică k_e. Se consideră că arcul se deformează numai în lungul axei Ox iar

originea reperului se consideră în extremitatea liberă a arcului nedeformat (Fig. 11.4). Un punct material M aflat în capătul arcului la o distanță x de originea reperului este supus acțiunii unei forțe elastice orientată spre originea reperului. Expresia aceste forțe este:

$$F_e = -k_e x\,. \tag{11.86}$$

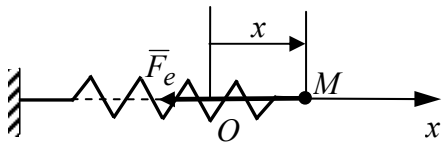

Fig. 11.4 Arcul de întindere-compresiune.

Funcția de forță și energia potențială sunt în acest caz:

$$U = -\frac{1}{2}k_e x^2, \quad V = \frac{1}{2}k_e x^2, \tag{11.87}$$

unde constanta C este considerată zero deoarece energia potențială în originea reperului este zero. Lucrul mecanic efectuat de forța elastică din poziția inițială de abscisă x până în origine (x=0) este:

$$L = \frac{1}{2}k_e x^2\,. \tag{11.88}$$

11.8. Mișcarea punctului material liber într-un mediu cu rezistență neglijabilă

Un punct material de masă m este lansat din originea O a unui reper $R(O,\bar{i},\bar{j},\bar{k})$ cu viteza inițială $\bar{v}_0$ care este situată în planul xOy și face unghiul α cu axa Ox (Fig. 11.5). Mișcarea sa are loc datorită vitezei inițiale și se desfășoară numai sub acțiunea greutății $\overline{G} = m\bar{g} = -mg\,\bar{j}$, prin urmare punctul material nefiind supus la legături este un punct material liber.

Problema Cauchy în acest caz se scrie de forma:

$$\begin{aligned} &m\ddot{\bar{r}} = \overline{G}, \\ &\bar{r}(0) = 0, \\ &\bar{v}(0) = \bar{v}_0. \end{aligned} \tag{11.89}$$

Proiecțiile pe axele de coordonate ale ecuației de mișcare sunt:

$$m\ddot{x} = 0\,, \tag{11.90}$$

$$m\ddot{y} = -mg\,, \tag{11.91}$$

$$m\ddot{z} = 0\,. \tag{11.92}$$

iar ale condițiilor inițiale sunt:

$$x(0)=0,\quad y(0)=0,\quad z(0)=0,\quad \dot{x}(0)=v_0\cos\alpha,\quad \dot{y}(0)=v_0\sin\alpha,\quad \dot{z}(0)=0. \qquad (11.93)$$

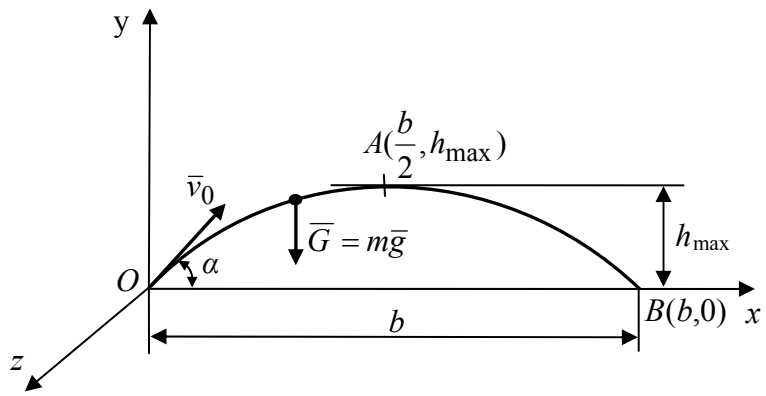

Fig.11.5 Mișcarea punctului în mediu cu rezistență neglijabilă

După o primă integrare a ecuațiilor diferențiale (11.90), (11.91) și (11.92) se obțin relațiile:

$$\dot{x}=C_1, \qquad (11.94)$$

$$\dot{y}=-gt+C_2, \qquad (11.95)$$

$$\dot{z}=C_3. \qquad (11.96)$$

Integrând încă o dată, rezultă:

$$x=C_1t+C_4, \qquad (11.97)$$

$$y=-g\frac{t^2}{2}+C_2t+C_5, \qquad (11.98)$$

$$z=C_3t+C_6. \qquad (11.99)$$

Impunând ca ecuațiile de mai sus să fie verificate de condițiile inițiale (11.93), se obțin următoarele valori pentru constantele de integrare:

$$C_1=v_0\cos\alpha,\quad C_2=v_0\sin\alpha,\quad C_3=0,\quad C_4=0,\quad C_5=0,\quad C_6=0. \qquad (11.100)$$

Înlocuirea constantelor de integrare în relațiile (11.97), (11.98) și (11.99) permite deducere ecuațiilor parametrice ale traiectoriei:

$$x=v_0\cos\alpha\, t, \qquad (11.101)$$

$$y=-g\frac{t^2}{2}+v_0\sin\alpha\ t, \qquad (11.102)$$

$$z=0. \qquad (11.103)$$

Deoarece $z = 0$, traiectoria este o curbă plană situată în planul xOy, a cărei ecuație analitică se obține prin eliminarea parametrului t:

$$y=-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2+x\,\mathrm{tg}\alpha. \qquad (11.104)$$

Traiectoria punctului este o parabolă așa după cum este reprezentată în figura 11.5. Punctul este lansat din originea *O* și ajunge în punctul *B*, distanța *OB=b* numindu-se bătaie.

Înlocuirea constantelor de integrare în relațiile (11.94), (11.95) și (11.96) permite scrierea componentelor vitezei punctului:

$$\dot{x} = v_0 \cos\alpha \,, \tag{11.105}$$

$$\dot{y} = -gt + v_0 \sin\alpha \,, \tag{11.106}$$

$$\dot{z} = 0 \,. \tag{11.107}$$

Faptul că pe direcția *Ox* componenta vitezei este constantă arată că pe această direcție mișcarea este uniformă iar impulsul se conservă.

Determinarea mărimii bătăii *b* se poate face pe baza observației că punctul *B* are coordonatele 0 și *b*, ceea ce înseamnă că valoarea lui *b* este tocmai soluția nenulă a ecuației:

$$-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + x\,\mathrm{tg}\alpha = 0 \,. \tag{11.108}$$

Se obține:

$$b = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} \,. \tag{11.109}$$

Bătaia depinde atât de viteza inițială cât și de unghiul de lansare a punctului față de orizontală. Valoarea maximă pentru o viteză inițială dată se obține pentru un unghi de 45° deoarece atunci sinusul are valoarea maximă 1. Mărimea bătăii se mai poate determina calculând mai întâi timpul t_B până când punctul ajunge în B prin rezolvarea ecuației:

$$-g\frac{t^2}{2} + v_0 \sin\alpha \;\; t = 0 \,, \tag{11.110}$$

a cărei soluție nenulă este:

$$t_B = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \,. \tag{11.111}$$

Apoi se înlocuiește t_B în relația (11.101) și se obține aceeași valoare a bătăii ca aceea dată de (11.109).

Înălțimea maximă $h_{\max}$ la care ajunge punctul se poate calcula impunând condiția de extrem funcției (11.104). Se află mai întâi rădăcinile derivatei, adică se rezolvă ecuația $\frac{dy}{dx} = 0$, care are forma:

$$-\frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} x + \mathrm{tg}\alpha = 0 \tag{11.112}$$

Soluția ecuației de mai sus reprezintă distanța pe orizontală la care se atinge înălțimea maximă, ea fiind tocmai abscisa punctului A:

$$x_A = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{2g}. \tag{11.113}$$

Se observă că această abscisă este exact jumătatea abscisei punctului *B*, prin urmare înălțimea maximă se atinge la jumătatea bătăii. Înlocuind x_A în (11.104) rezultă înălțimea maximă:

$$h_{\max} = y(x_A) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \tag{11.114}$$

Înălțimea maximă $h_{\max}$ la care ajunge punctul se mai poate calcula pe baza observației că în acest punct viteza are numai componentă orizontală, deci în acest punct componenta verticală a vitezei, dată de relația (11.106), se anulează. Soluția ecuației:

$$-gt + v_0 \sin\alpha = 0 \tag{11.115}$$

este timpul t_A când are loc anularea componentei verticale a vitezei care coincide cu timpul scurs până când punctul atinge punctul *A* de înălțime maximă:

$$t_A = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}. \tag{11.116}$$

Acest timp este jumătate din timpul necesar punctului pentru a ajunge în *B*, adică de a parcurge jumătate din bătaia *b*. Înlocuind t_A în (11.102) se obține aceeași valoare pentru $h_{\max}$ ca cea dată de relația (11.114).

În problemele de balistică se mai caută determinarea punctelor din planul de tragere care pot fi atinse cu o viteză inițială dată a proiectilului atunci când unghiul de tragere α se modifică. Pentru rezolvarea problemei se impune condiția ca un punct $P(x_P, y_P)$ să se afle pe traiectoria proiectilului, adică coordonatele sale să verifice ecuația traiectoriei (11.104). Se obține relația:

$$y_P = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x_P^2 + x_P \operatorname{tg}\alpha \tag{11.117}$$

Pentru a vedea sub ce unghi α trebuie lansat proiectilul pentru a atinge punctul *P*, relația (11.117) este privită ca o ecuație în necunoscuta α și se rescrie sub forma:

$$g\, x_P^2 \operatorname{tg}^2\alpha - 2v_0^2\, x_P \operatorname{tg}\alpha + g\, x_P^2 + 2v_0^2\, y_P = 0. \tag{11.118}$$

Privită ca o ecuație de gradul doi în tg α, relația anterioară are discriminantul:

$$\Delta = v_0^4 x_P^2 - g x_P^2 (g x_P^2 + 2v_0^2 y_P) \tag{11.119}$$

Dacă discriminantul este strict pozitiv, atunci ecuația (11.117) are două soluții reale distincte și punctul P poate fi atins sub două unghiuri de tragere, respectiv cu unghiul mai mic când proiectilul

este în urcare și cu unghiul mai mare când proiectilul este în coborâre (fig. 11.6). Dacă discriminantul este nul, atunci între coordonatele lui P are loc relația:

$$y_P = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x_P^2, \tag{11.120}$$

iar punctul P poate fi atins pentru o valoare unică a unghiului α care rezultă din (11.118) pentru discriminatul nul:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{v_0^2}{g\, x_P}, \quad x_P \neq 0\,. \tag{11.121}$$

Dacă discriminantul este negativ, atunci punctul P nu poate fi atins cu nicio valoare a unghiului de lansare α și se spune că punctul P se află în domeniul de siguranță.

Relația (11.120) este ecuația unei parabole denumită parabola de siguranță (fig. 11.6). Punctele P din afara ei, adică cele pentru care:

$$y_P > \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x_P^2 \tag{11.122}$$

nu pot fi atinse.

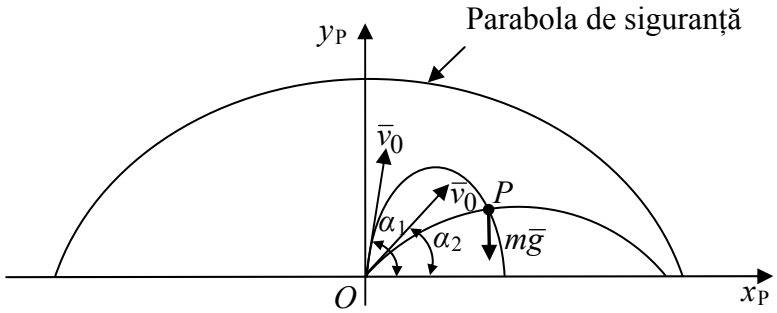

Fig. 11.6 Parabola de siguranță

Teorema conservării energiei mecanice, atunci când energia potențială la nivelul poziției de lansare este considerată nulă conduce la relația:

$$\frac{m\bar{v}^2}{2} + mgh = \frac{m\bar{v}_0^2}{2} + 0\,. \tag{11.123}$$

Din (11.123) se poate calcula viteza punctului atunci când se află la o înălțime h pe traiectorie:

$$v = \sqrt{\bar{v}_0^2 - 2gh}\,, \tag{11.124}$$

relație ce este totodată o integrală primă.

11.9. Mişcarea în aer punctului material liber

Un punct material de masă m este lansat din originea O a unui reper $R(O,\bar{i},\bar{j},\bar{k})$ cu viteza iniţială $\bar{v}_0$ care este situată în planul xOy şi face unghiul α cu axa Ox (Fig. 11.7). Punctul material se mişcă în aer, rezistenţa acestui mediu nefiind neglijată. Mişcarea sa are loc datorită vitezei iniţiale şi se desfăşoară sub acţiunea greutăţii $\overline{G} = m\overline{g} = -mg\,\bar{j}$ dar şi sub acţiunea unei forţe de rezistenţă a mediului $\overline{R}$ datorate vâscozităţii acestuia. Această forţă este orientată în sens opus vitezei punctului deci are direcţia tangentei la traiectorie. Cu cât viteza punctului este mai mare, cu atât forţa rezistentă este mai mare.

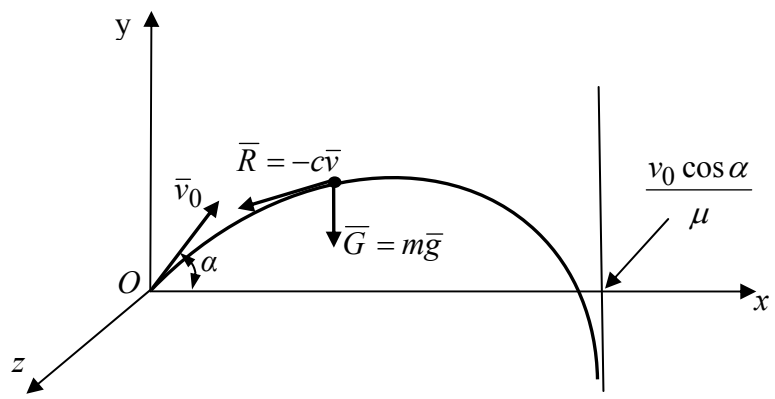

Fig.11.7 Mişcarea punctului în aer

Experimental s-a constatat că se poate scrie o relaţie generală pentru expresia forţei de rezistenţă a mediului de tipul:

$$\overline{R} = -c\overline{v}^k, \qquad (11.125)$$

unde c este o constantă care depinde de mai mulţi factori cum ar fi vâscozitatea aerului şi dimensiunile corpului. Puterea k la care este viteza depinde de mărimea acesteia, astfel (Caius Iacob, Mecanică teoretică, EDP, Bucureşti 1980, pag. 344):

- k=1 pentru viteze mici;
- k=2 pentru viteze de până la 250 m/s;
- k=3 pentru viteze de până la 500 m/s;
- k=5 pentru viteze de până la 700 m/s;
- k=1,7 pentru viteze de până la 1200 m/s.

Se recomandă ca valorile coeficientului k să fie determinate experimental pentru fiecare caz în parte.

Mişcarea este, şi în acest caz, a unui punct material liber întrucât punctul nu este supus la legături.

Problema Cauchy se scrie astfel:

$$\begin{aligned} &m\ddot{\bar{r}} = \bar{G} + \bar{R}, \\ &\bar{r}(0) = 0, \\ &\bar{v}(0) = \bar{v}_0. \end{aligned} \tag{11.126}$$

Pentru rezolvarea problemei Cauchy, în expresia forței rezistente (11.125), se consideră valoarea 1 a exponentului k ce corespunde unei deplasări cu viteză mică a punctului, adică forța rezistentă se scrie:

$$\bar{R} = -c\bar{v}\,. \tag{11.127}$$

Ținând cont de această ipoteză, ecuația de mișcare scrisă sub formă vectorială este:

$$m\ddot{\bar{r}} = m\bar{g} - c\dot{\bar{r}}\,. \tag{11.128}$$

După ce se împart termenii la masa m și se notează cu μ raportul

$$\mu = \frac{c}{m}\,, \tag{11.129}$$

ecuația (11.128) capătă forma:

$$\ddot{\bar{r}} + \mu\dot{\bar{r}} = \bar{g}\,. \tag{11.130}$$

Aceasta este o ecuație diferențială de ordinul întâi, liniară, neomogenă și cu coeficienți constanți. Soluția ei se obține sumând soluția generală a ecuației omogene:

$$\ddot{\bar{r}} + \mu\dot{\bar{r}} = 0 \tag{11.131}$$

cu o soluție particulară a ecuației neomogene (11.130).

Ecuația caracteristică a ecuației omogene (11.131) este:

$$\beta^2 + \beta\mu = 0 \tag{11.132}$$

care are soluțiile reale:

$$\beta_1 = 0 \qquad \text{și} \qquad \beta_2 = -\mu\,. \tag{11.133}$$

Soluția generală a ecuației diferențiale omogene (11.131) se scrie:

$$\bar{r}_o = \bar{C}_1 \cdot e^{\beta_1 t} + \bar{C}_2 \cdot e^{\beta_2 t} = \bar{C}_1 + \bar{C}_2 e^{-\mu t} \tag{11.134}$$

în care $\bar{C}_1$ și $\bar{C}_2$ sunt constante vectoriale care trebuie determinate pe baza condițiilor inițiale.

Soluția particulară a ecuației neomogene (11.130) se caută de forma membrului drept și se consideră de tipul unui polinom de ordinul întâi în variabila t cu coeficienți vectoriali:

$$\bar{r}_p = \bar{A}t\,, \tag{11.135}$$

unde $\bar{A}$ este o constantă vectorială necunoscută.

Impunând condiția ca această soluție particulară să verifice ecuația neomegenă (11.130), se obține o ecuație vectorială cu necunoscuta $\bar{A}$ care are soluția

$$\overline{A} = \frac{\overline{g}}{\mu}. \tag{11.136}$$

Soluția generală a ecuației diferențiale (11.130) este deci

$$\overline{r} = \overline{r}_o + \overline{r}_p = \overline{C}_1 + \overline{C}_2 e^{-\mu t} + \frac{\overline{g}}{\mu} t. \tag{11.137}$$

Pentru a determina constantele vectoriale $\overline{C}_1$ și $\overline{C}_2$ trebuie impusă condiția ca poziția și viteza punctului să verifice condițiile inițiale din (11.126). Pentru aceasta, mai întâi se derivează soluția generală (11.137) în raport cu timpul pentru a obține expresia vitezei punctului:

$$\overline{v} = \dot{\overline{r}} = -\mu \overline{C}_2 e^{-\mu t} + \frac{\overline{g}}{\mu}. \tag{11.138}$$

Se impun apoi condițiile inițiale $\overline{r}(0) = 0$ și $\overline{v}(0) = \overline{v}_0$ la momentul t = 0 vectorului de poziție (11.137) și vitezei (11.138) ale punctului. Ecuațiile (11.137) și (11.138) devin:

$$\begin{aligned} &\overline{C}_1 + \overline{C}_2 = \overline{0} \\ &-\mu \overline{C}_2 + \frac{\overline{g}}{\mu} = \overline{v}_0 \end{aligned}. \tag{11.139}$$

După rezolvarea sistemului de mai sus se obține soluția:

$$\begin{aligned} \overline{C}_1 &= \frac{1}{\mu}\left(\overline{v}_0 - \frac{\overline{g}}{\mu}\right), \\ \overline{C}_2 &= -\frac{1}{\mu}\left(\overline{v}_0 - \frac{\overline{g}}{\mu}\right). \end{aligned} \tag{11.140}$$

Înlocuind valorile de mai sus ale constantelor $\overline{C}_1$ și $\overline{C}_2$ în expresia (11.137), soluția problemei Cauchy (11.126) se scrie:

$$\overline{r} = \frac{1}{\mu}\left(\overline{v}_0 - \frac{\overline{g}}{\mu}\right)(1 - e^{-\mu t}) + \frac{\overline{g}}{\mu} t \tag{11.141}$$

Deoarece expresia (11.141) este de forma $\overline{r} = a\overline{v}_0 + b\overline{g}$, unde a și b sunt constante reale, rezultă că vectorul de poziție $\overline{r}$ este coplanar cu vectorii $\overline{v}_0$ și $\overline{g}$, adică se află pe toată durata mișcării în planul *xOy*, unde se găsesc și cei doi vectori. Cu alte cuvinte, mișcarea punctului se desfășoară numai în planul *xOy*. În aceste condiții proiectarea relației vectoriale (11.141) pe axele *Ox* și *Oy* conduce la ecuațiile scalare de mișcare pe cele două axe:

$$x = \frac{1}{\mu} v_0 \cos\alpha (1 - e^{-\mu t}), \tag{11.142}$$

$$y = \frac{1}{\mu}\left(v_0 \sin\alpha + \frac{g}{\mu}\right)(1 - e^{-\mu t}) - \frac{g}{\mu} t. \tag{11.143}$$

Pentru a obține ecuația analitică a traiectoriei, trebuie eliminat timpul între relațiile de mai sus. Din (11.142) rezultă:

$$e^{-\mu t} = 1 - \frac{\mu}{v_0 \cos\alpha} x\,, \tag{11.144}$$

de unde:

$$t = -\frac{1}{\mu} \ln\left(1 - \frac{\mu}{v_0 \cos\alpha} x\right). \tag{11.145}$$

Înlocuind (11.144) și (11.145) în (11.143) se obține următoarea ecuație analitică a traiectoriei:

$$y = \left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{g}{\mu v_0 \cos\alpha}\right) x + \frac{g}{\mu^2} \ln\left(1 - \frac{\mu}{v_0 \cos\alpha} x\right). \tag{11.146}$$

Deoarece $e^{-\mu t} > 0$, din relația (11.144) rezultă că:

$$1 - \frac{\mu}{v_0 \cos\alpha} x > 0\,, \tag{11.147}$$

ceea ce însemnă:

$$x < \frac{v_0 \cos\alpha}{\mu}. \tag{11.148}$$

Pe de altă parte, fiindcă $t \geq 0$, din (11.142) rezultă $x \geq 0$. Coroborând cele două inegalități, se obține:

$$0 \leq x < \frac{v_0 \cos\alpha}{\mu}\,, \tag{11.149}$$

adică domeniul de definiție al funcției (11.146) este intervalul [0, $\frac{v_0 \cos\alpha}{\mu}$). Deoarece:

$$\lim_{x \to \frac{v_0 \cos\alpha}{\mu}} y = \lim_{x \to \frac{v_0 \cos\alpha}{\mu}} \left(\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{g}{\mu v_0 \cos\alpha}\right) x + \frac{g}{\mu^2} \ln\left(1 - \frac{\mu}{v_0 \cos\alpha} x\right)\right) = -\infty \tag{11.150}$$

rezultă că traiectoria are o asimptotă verticală în punctul $x = \frac{v_0 \cos\alpha}{\mu}$ după cum se poate vedea în figura 11.7.

Înlocuind valoarea lui $\overline{C}_2$ în expresia (11.138), se obține viteza punctului:

$$\overline{v} = \frac{\overline{g}}{\mu} + \left(\overline{v}_0 - \frac{\overline{g}}{\mu}\right) e^{-\mu t}\,, \tag{11.151}$$

cu componentele:

$$v_x = v_0 \cos\alpha \cdot e^{-\mu t}\,, \tag{11.152}$$

$$v_y = -\frac{g}{\mu} + \left(v_0 \sin\alpha + \frac{g}{\mu}\right) \cdot e^{-\mu t}. \tag{11.153}$$

11.10.Mișcarea punctului material sub acțiunea unei forțe centrale. Ecuația lui Binet

Se consideră un punct material *M* supus acțiunii unei forțe de atracție sau de respingere de către un punct fix *O*, forța fiind coliniară cu *OM*. Suportul acestei forțe va trece întotdeauna prin punctul fix *O* și, de aceea, o astfel de forță se mai numește forță centrală. Deoarece momentul acestei forțe în raport cu polul *O* este întotdeauna nul, are loc conservarea momentului cinetic ceea ce face ca traiectoria punctului să fie o curbă plană sau o dreaptă, în funcție de condițiile inițiale iar mișcarea să se desfășoare cu viteză areolară constantă. Se consideră situația când condițiile inițiale sunt nenule, $\bar{r}_0 \neq 0, \bar{v}_0 \neq 0$, iar cei doi vectori nu sunt coliniari (figura 11.8). Traiectoria punctului va fi în acest caz o curbă plană situată în planul determinat de cei doi vectori și se vor folosi coordonatele polare pentru studiul mișcării. Poziția inițială a punctului este notată cu M_0.

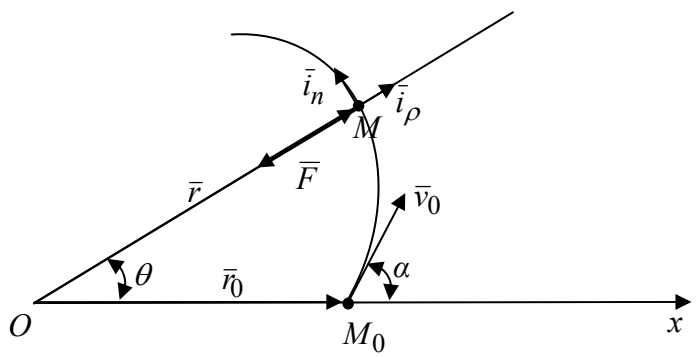

Fig. 11.8 Mișcarea punctului sub acțiunea unei forțe centrale

Forța care acționează asupra punctului este:

$$\bar{F} = \pm|\bar{F}|\frac{\overline{OM}}{|\overline{OM}|} = F\bar{i}_\rho, \tag{11.154}$$

unde s-a notat cu *F* mărimea algebrică a forței, adică s-a inclus în aceeași notație modulul și semnul. Dacă semnul este plus forța este de respingere iar dacă semnul este minus forța este de atracție. Problema Cauchy se scrie:

$$m((\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\bar{i}_\rho + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\bar{i}_n = F\bar{i}_\rho, \tag{11.155}$$

$$r(0) = r_0, \quad \theta(0) = 0 \quad v_\rho(0) = \dot{r}(0) = v_0\cos\alpha, \quad v_n(0) = r(0)\dot{\theta}(0) = r_0\dot{\theta}(0) = v_0\sin\alpha. \tag{11.156}$$

Proiectând pe axa transversală relația (11.155) se obține ecuația:

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0, \tag{11.157}$$

care, după înmulțire cu *r* devine:

$$2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0. \tag{11.158}$$

Expresia (11.158) este derivata în raport cu timpul a funcţei $r^2\dot{\theta}$ adică are loc egalitatea:

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0, \tag{11.159}$$

ceea ce însemnă că funcţia derivată este constantă:

$$r^2\dot{\theta} = C. \tag{11.160}$$

Constanta C se determină impunând condiţia ca funcţia (11.160) să verifice condiţiile iniţiale (11.156) ceea ce conduce la următoarea valoare a constantei de integrare C:

$$C = r_0 v_0 \sin\alpha. \tag{11.161}$$

Înlocuind (11.161) în (11.160) se obţine:

$$r^2\dot{\theta} = r_0 v_0 \sin\alpha. \tag{11.162}$$

Momentul cinetic al punctului în raport cu polul O este constant şi se calculează cu relaţia:

$$\overline{K}_o = \overline{r} \times m\overline{v} = \overline{r}_0 \times m\overline{v}_0 = m r_0 v_0 \sin\alpha\, \overline{n}, \tag{11.163}$$

unde cu $\overline{n}$ s-a notat versorul normalei la planul determinat de vectorii $\overline{r}_0$ şi $\overline{v}_0$. Constanta C este mărimea algebrică a vectorului moment cinetic, notată K_0, împărţită la masa punctului:

$$C = r_0 v_0 \sin\alpha = \frac{K_0}{m}. \tag{11.164}$$

11.10.1. Ecuaţia lui Binet

Proiectarea ecuaţiei diferenţiale (11.155) pe direcţia axei radiale conduce la ecuaţia diferenţială:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F, \tag{11.165}$$

Se pune problema integrării ecuaţiei anterioare. Pentru aceasta se exprimă în alt mod derivata de ordinul întâi şi al doilea a lui r în raport cu timpul. Derivata de ordinul întâi se scrie:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{dr}{d\theta}. \tag{11.166}$$

Pe de altă parte, din (11.160) rezultă:

$$\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}. \tag{11.167}$$

Înlocuind (11.167) în (11.166) se obţine expresia:

$$\dot{r} = \frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -C\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right). \tag{11.168}$$

Derivata de ordinul al doilea a lui r în raport cu timpul, ţinând cont şi de (11.167), se mai scrie:

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\dot{r}}{d\theta} = +\frac{C}{r^2}\cdot\frac{d}{d\theta}\left[-C\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right] = -\frac{C^2}{r^2}\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}. \qquad (11.169)$$

Înlocuind relația de mai sus în ecuația (11.165) se obține:

$$m\left(-\frac{C^2}{r^2}\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} - r\dot{\theta}^2\right) = F. \qquad (11.170)$$

Utilizând relația (11.167) rezultă <u>ecuația lui Binet</u> care are expresia:

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = -\frac{Fr^2}{mC^2}. \qquad (11.171)$$

Ecuația lui Binet poate furniza, prin integrare, ecuația traiectoriei în coordonate polare $r = r(\theta)$ dacă forța F depinde numai de coordonatele r și θ ale punctului. Apoi, folosind relația (11.162) poate fi găsită și legea de mișcare a punctului pe această traiectorie.

Ecuația lui Binet se poate scrie în funcție de mărimea algebrică a momentului cinetic al punctului scris în raport cu polul O pe baza relației (11.164), care, înlocuită în (11.171) conduce la următoarea formă a ecuației lui Binet:

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = -\frac{mFr^2}{K_0^2}. \qquad (11.172)$$

11.10.2. Mișcarea sub acțiunea forței centrale de atracție universală

Ecuația lui Binet are termenul din dreapta neliniar. În cazul forțelor care depind de inversul pătratului distanței, cum este forța de atracție universală, acest termen devine constant și ecuația lui Binet se poate integra. Forța de atracție universală dintre două corpuri de mase m și M între care este distanța r are mărimea algebrică:

$$F = k\frac{mM}{r^2}. \qquad (11.173)$$

unde k este constanta de atracție universală a cărei mărime a fost determinată experimental pentru prima dată de către fizicianul englez Henry Cavendish (1731-1810). Valoarea recomandată a acestei constante de către CODATA (Committee on Data for Science and Technology) este

$$k = 6{,}67384\cdot 10^{-11}\frac{m^3}{kg\cdot s^2}. \qquad (11.174)$$

Ecuația lui Binet dată de relația (11.171) capătă următoarea formă în cazul forței de atracție universală:

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}+\frac{1}{r}=\frac{kM}{C^2}. \tag{11.175}$$

Aceasta este o ecuație diferențială liniară de ordinul doi, neomogenă, cu coeficienți constanți. Ecuația omogenă

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}+\frac{1}{r}=0 \tag{11.176}$$

are ecuația caracteristică

$$\beta^2+1=0. \tag{11.177}$$

cu soluțiile $\beta_1=i$ și $\beta_2=-i$. Soluția generală a ecuației omogene este:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_o=C_1\cos\theta+C_2\sin\theta. \tag{11.178}$$

O soluție particulară a ecuației neomogene se caută de forma unei constante notată B:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_p=B \tag{11.179}$$

care, înlocuită în ecuația (11.175), conduce la soluția particulară

$$\left(\frac{1}{r}\right)_p=\frac{kM}{C^2}. \tag{11.180}$$

Soluția ecuației diferențiale (11.175) este suma dintre soluția generală a ecuației omogene (11.178) și soluția particulară (11.180), adică este de forma:

$$\frac{1}{r}=C_1\cos\theta+C_2\sin\theta+\frac{kM}{C^2}. \tag{11.181}$$

Dacă se notează

$$\sqrt{C_1^2+C_2^2}=A \text{ și } \frac{C_2}{C_1}=\mathrm{tg}\theta_0, \tag{11.182}$$

atunci soluția (11.181) capătă forma:

$$\frac{1}{r}=A\cos(\theta-\theta_0)+\frac{kM}{C^2}. \tag{11.183}$$

Făcând notațiile

$$\frac{kM}{C^2}e=A \text{ și } \frac{C^2}{kM}=p, \tag{11.184}$$

din ecuația (11.183) rezultă:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}. \tag{11.185}$$

Aceasta este ecuația generală a unei conice situată în planul mișcării. Parametrul p se numește parametru focal iar parametrul e se numește excentricitate. Excentricitatea este un indicator al formei traiectoriei, fiind posibile următoarele situații:

1. Dacă $e = 0$, atunci traiectoria punctului este un cerc având în centru punctul de masă *M*;
2. Dacă $0 < e < 1$, atunci traiectoria punctului este o elipsă având în unul din focare punctul de masă *M*;
3. Dacă $e = 1$, atunci traiectoria punctului este o parabolă având în focar punctul de masă *M*;
4. Dacă $e > 1$, atunci traiectoria punctului este o hiperbolă având în focar punctul de masă *M*;

Pentru a putea determina constantele de integrare din ecuația (11.181), trebuie mai întâi derivată această ecuație în raport cu timpul:

$$-\frac{1}{r^2}\dot{r} = -C_1\dot{\theta}\sin\theta + C_2\dot{\theta}\cos\theta \tag{11.186}$$

Impunând condițiile inițiale (11.156) în ecuațiile (11.181) și (11.186), se obține următorul sistem de ecuații algebrice având necunoscutele C_1 și C_2:

$$\frac{1}{r_0} = C_1 + \frac{kM}{C^2}, \tag{11.187}$$

$$-\frac{1}{r_0^2}v_0\cos\alpha = C_2\frac{v_0\sin\alpha}{r_0}. \tag{11.188}$$

Soluția sistemului de ecuații de mai sus este:

$$C_1 = \frac{1}{r_0} - \frac{kM}{C^2}, \tag{11.189}$$

$$C_2 = -\frac{\cos\alpha}{r_0\sin\alpha}. \tag{11.190}$$

Folosind aceste valori, din relațiile (11.182) și (11.184) și pe baza relației (11.161), rezultă că pătratul excentricității este:

$$e^2 = 1 + \frac{v_0^2 r_0^2 \sin^2\alpha}{k^2 M^2}\left(v_0^2 - 2\frac{kM}{r_0}\right). \tag{11.191}$$

Din relația de mai sus se poate concluziona că traiectoria punctului de masă *m* este:

1. O elipsă în cazul în care $v_0^2 < 2\frac{kM}{r_0}$ adică atunci când $0 < e < 1$;

Traiectoria este circulară dacă $e = 0$. Din (11.191) rezultă că excentricitatea este zero dacă

$$v_0^2 = \frac{kM}{r_0} \text{ și } \alpha = \frac{\pi}{2}. \tag{11.192}$$

2. O parabolă în cazul în care $v_0^2 = 2\frac{kM}{r_0}$ adică atunci când $e = 1$;

3. O hiperbolă în cazul în care $v_0^2 > 2\frac{kM}{r_0}$ adică atunci când $1 < e$.

Se remarcă faptul că forma traiectoriei nu depinde de unghiul α, deci de orientare inițială a vitezei ci numai de viteza inițială și de poziția inițială a punctului, cu excepția cazului particular al traiectoriei circulare.

11.10.2.1. *Legile lui Kepler*

Savantul german Johannes Kepler (1571-1630), a descoperit trei legi importante care guvernează mișcarea planetelor. El le-a descoperit pe cale empirică.

Prima lege a lui Kepler afirmă că planetele descriu traiectorii eliptice având soarele în unul din focare. Acest fapt rezultă din ecuația conicei (11.185).

Cea de a doua lege a lui Kepler afirmă că vectorul de poziție al unei planete în raport cu soarele descrie arii egale în intervale de timp egale. Această lege este consecința mișcării planetei cu viteză areolară constantă.

Cea de a treia lege a lui Kepler afirmă că raportul dintre pătratul timpului de revoluție și cubul semiaxei mari a elipsei este același pentru toate planetele. Această lege poate fi demonstrată acum prin calcul. Pentru aceasta se notează distanța minimă de la soare la planetă măsurată pe direcția semiaxei mari a elipsei cu r_P, notație bazată pe faptul că acest punct se numește pericentru (figura 11.9). Se mai notează distanța maximă de la soare la planetă măsurată pe direcția semiaxei mari a elipsei cu r_A, notație bazată pe faptul că acest punct se numește apocentru (figura 11.9). Valorile acestor distanțe sunt:

$$r_A = \frac{p}{1-e}, \tag{11.193}$$

$$r_P = \frac{p}{1+e}. \tag{11.194}$$

Dacă se notează semiaxa mare a elipsei cu a și semiaxa mică cu b, atunci lungimile acestor semiaxe se calculează cu relațiile:

$$a = \frac{r_A + r_P}{2} = \frac{p}{1-e^2} = \frac{kM}{2\frac{kM}{r_0} - v_0^2}, \tag{11.195}$$

$$b = a\sqrt{1-e^2} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{v_0 r_0 \sin\alpha}{\sqrt{2\frac{kM}{r_0} - v_0^2}} \tag{11.196}$$

Relația (11.195) arată că semiaxa mare a elipsei nu depinde de unghiul α.

Timpul în care planeta parcurge întreaga elipsă numit și timpul de revoluție, notat T, se calculează folosind relația (11.167):

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{C} d\theta = \frac{1}{C}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta . \tag{11.197}$$

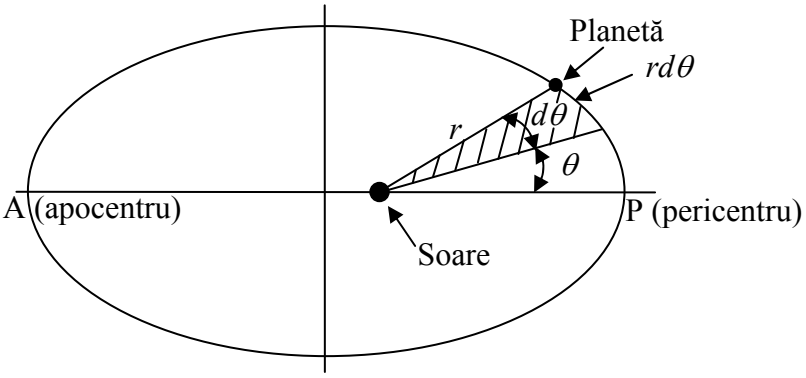

Fig. 11.9 Traiectoria unei planete

Ținând cont că $\frac{1}{2} r \cdot rd\theta$ aproximează, atunci când $d\theta \to 0$, aria unui triunghi (fig. 11.9) cu baza $rd\theta$ și înălțimea r, integrând de la 0 la 2π această arie elementară se va obține aria elipsei. Prin urmare integrala din relația (11.197) reprezintă dublul ariei elipsei adică are valoarea $2\pi ab$. Rezultă pe baza relației (11.161) că perioada de revoluție a planetei este:

$$T = \frac{2\pi ab}{r_0 v_0 \sin\alpha} . \tag{11.198}$$

Înlocuind în formula de mai sus valorile semiaxelor elipsei date de (11.195) și respectiv (11.196), se obține:

$$T = \frac{2\pi kM}{\left(2\frac{kM}{r_0} - v_0^2\right)^{\frac{3}{2}}} . \tag{11.199}$$

Ținând cont de relația (11.195), din formula de mai sus se obține legea a treia a lui Kepler:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{kM} . \tag{11.200}$$

11.10.2.2. *Vitezele cosmice*

Vitezele cosmice sunt în număr de trei. Prima viteză cosmică este viteza pe care trebuie să o aibă un satelit care nu este lansat de la suprafața pământului ci de la o înălțime h pentru a deveni satelit al pământului pe o orbită circulară. Ținând cont că greutatea unui corp de masă m situat la suprafața pământului este egală cu forța de atracție exercitată de pământ, se poate scrie egalitatea:

$$mg = k\frac{mM}{R^2}, \tag{11.201}$$

unde M este masa pământului iar R este raza lui. Din relația de mai sus rezultă:

$$kM = gR^2. \tag{11.202}$$

Viteza pentru o traiectorie circulară a satelitului este dată de relația (11.192), în care, dacă înlocuim relația (11.202), se obține:

$$v_0^2 = \frac{gR^2}{r_0} = \frac{gR^2}{R+h}. \tag{11.203}$$

Prima viteză cosmică, notată v_1, atunci când se neglijează înălțimea h în raport cu raza pământului care se consideră a fi media între raza la poli de 6356,8 km și raza la ecuator de 6378,137 km, este:

$$v_1 = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}} \cong \sqrt{gR} = 7.91\,\text{km/s} \tag{11.204}$$

A doua viteză cosmică, notată v_2, este viteza necesară satelitului pentru a ieși din câmpul gravitațional al pământului. Valoarea minimă este cea care corespunde unei traiectorii de tip parabolă, adică are mărimea:

$$v_2 = \sqrt{2\frac{kM}{r_0}} \cong \sqrt{2gR} = \sqrt{2}\,v_1 = 11{,}2\,\text{km/s}. \tag{11.205}$$

Un satelit, care are o viteză cuprinsă între prima viteză cosmică și cea de a doua, lansat de la o înălțime egală cu suma dintre raza pământului și grosimea atmosferei terestre, va avea o traiectorie în formă de elipsă și va fi satelit artificial al pământului.

A treia viteză cosmică, notată v_3, este viteza pe care trebuie să o aibă satelitul pentru a părăsi sistemul solar, adică să iasă din câmpul gravitațional al soarelui. Deoarece masa pământului este $1{,}9891\cdot 10^{30}\,\text{kg}$ iar distanța de la pământ la soare este $149600000\,\text{km}$, rezultă că viteza necesară satelitului pentru a părăsi câmpul gravitațional al soarelui este:

$$v_3 = \sqrt{2\frac{kM}{r_0}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6{,}67384\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}9891\cdot 10^{30}}{149600000}} = 42{,}1\,\text{km/s} \tag{11.206}$$

Dacă se ține cont că satelitul se lansează de pe pământ iar viteza acestuia pe orbită este de 28,8 km/s, însemnă că satelitului trebuie să i se imprime numai o viteză suplimentară de 12,3 km/s. Toate aceste valori sunt orientative deoarece nu s-a ținut cont de rezistența mediului în cazul lansării de pe suprafața pământului și de alte elemente ce pot influența aceste viteze. Dacă, de exemplu, se ține cont de atracția exercitată de pământ, atunci a treia viteză cosmică este 16,6 km/s (Voinea R., Voiculescu D.,Ceaușu V., Mecanica, E.D.P., București, 1983, pag.300).

11.10.3. Mișcarea punctului material sub acțiunea forțelor elastice

Se consideră un punct fix *O* care exercită asupra unui punct material mobil *M* având masa *m* o forță de atracție care este proporțională cu distanța dintre cele două puncte. Acest tip de forță se numește forță elastică. Dacă $\bar{r}$ este vectorul de poziție al punctului *M* în raport cu polul O, atunci forța elastică care acționează asupra punctului M este

$$\bar{F}_e = -k_e \bar{r}\,, \tag{11.207}$$

unde k_e este o constantă pozitivă denumită constantă elastică. Forța elastică este o forță centrală deoarece trece întotdeuna prin punctul fix *O*. Momentul cinetic se conservă în cazul forțelor centrale ceea ce face ca, în funcție de condițiile inițiale, traiectoria să fie una rectilinie sau o curbă plană.

Vom considera cazul în care traiectoria punctului este rectilinie, adică atunci când vectorul de poziție $\bar{r}_0$ al punctului la momentul $t = 0$ este nenul (punctul nu coincide cu centrul atractiv *O*) iar viteza $\bar{v}_0$ a punctului este coliniară cu $\bar{r}_0$. Dacă traiectoria rectilinie a punctului se consideră a fi axa *Ox* (fig. 11.10), iar asupra lui acționează numai forța elastică

$$F_e = -k_e x\,, \tag{11.208}$$

atunci problema Cauchy se scrie:

$$m\ddot{x} = -k_e x\,, \tag{11.209}$$

$$x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = v_0\,. \tag{11.210}$$

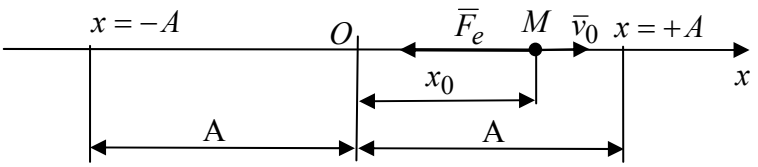

Fig. 11.10 Mișcarea rectilinie oscilatorie a punctului.

Ecuația de mișcare (11.209) este o ecuație diferențială liniară, omogenă de ordinul doi cu coeficienți constanți. Cu notația

$$\frac{k_e}{m} = k^2, \tag{11.211}$$

ecuația de mișcare capătă forma:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \tag{11.212}$$

Ecuație caracteristică atașată este

$$r^2 + k^2 = 0 \tag{11.213}$$

și are soluțiile imaginare

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{-k^2} = \pm ki \qquad (i = \sqrt{1}) \tag{11.214}$$

Soluția generală a ecuației diferențiale (11.212) se scrie

$$x = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt) \tag{11.215}$$

Pentru determinarea constantelor de integrare C_1 și C_2, mai întâi se calculează viteza punctului prin derivarea legii de mișcare (11.215) în raport cu *t*, rezultând:

$$\dot{x} = -kC_1 \sin(kt) + C_2 \cos(kt). \tag{11.216}$$

Se impune apoi condiția ca la momentul inițial $t = 0$ condițiile inițiale (11.210) să verifice relațiile (11.215) și (11.216). Se obțin următoarele valori pentru cele două constante de integrare:

$$C_1 = x_0, \tag{11.217}$$

$$C_2 = \frac{v_0}{k}. \tag{11.218}$$

După înlocuirea valorilor constantelor în relația (11.215), se obține următoarea lege de mișcare a punctului:

$$x = x_0 \cos(kt) + \frac{v_0}{k} \sin(kt). \tag{11. 219}$$

Pentru a evidenția tipul mișcării executate de punctul material, se scoate forțat în factor constanta C_2, considerată nenulă,în relația (11.215) și se obține:

$$x = \mathrm{C}_2 \left(\frac{\mathrm{C}_1}{\mathrm{C}_2} \cos(kt) + \sin(kt) \right). \tag{11.220}$$

Cu notațiile

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\mathrm{C}_1}{\mathrm{C}_2} \tag{11.221}$$

și

$$A = \sqrt{\mathrm{C}_1^2 + \mathrm{C}_2^2}, \tag{11.222}$$

relația (11.220) se scrie

$$x = \mathrm{C}_2 \frac{sin\alpha \cos(kt) + \cos\alpha \sin(kt)}{\cos\alpha} \tag{11.223}$$

sau, ținând cont de egalitatea

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \tag{11.224}$$

se obține:

$$x = A\sin(kt + \alpha). \tag{11.225}$$

Pentru cazul în care $C_2 = 0$, relația (11.215) capătă o formă de tipul (11.225):

$$x = C_1 \cos kt = x_0 \cos kt = x_0 \sin(kt + \frac{\pi}{2}) \tag{11.226}$$

Relațiile (11.225) și (11.226) arată că punctul are o mișcare rectilinie oscilatorie armonică având pulsația

$$k = \sqrt{\frac{k_e}{m}}, \tag{11.227}$$

și perioada

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_e}}. \tag{11.228}$$

În cazul în care $v_0 = 0$ amplitudinea A este egală cu x_0 și faza inițială este $\frac{\pi}{2}$, iar dacă $v_0 \neq 0$ amplitudinea este

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}} \tag{11.229}$$

și faza inițială

$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{x_0 k}{v_0}. \tag{11.230}$$

Viteza și accelerația punctului se obțin derivând în raport cu timpul relația (11.219) sau (11.225).

Forța elastică este o forță conservativă și, de aceea, energia mecanică se conservă, adică are loc relația

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2}k_e x^2 = \text{constant}. \tag{11.231}$$

În timpul mișcării are loc transformarea continuă a energiei potențiale în energie cinetică și invers astfel încât suma celor două energii este constantă.

Mișcarea rectilinie a punctelor materiale atașate elementelor elastice de tip arcuri de întindere-compresiune (Fig. 11.11), în cazul neglijării frecărilor, este modelată cu ajutorul relațiilor de tipul (11.219) sau (11.225). Se consideră că punctul *O* din figura 11.11 este în poziția de echilibru static, adică poziția în care forța elstică din arc este echilibrată de greutatea punctului *M*.

În raport cu acest punct, ecuația de mișcare a punctului *M*, în condiții inițiale nenule, este de forma (11.219) sau (11.225).

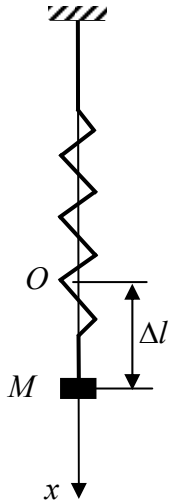

Fig. 11.10. Arcul de întindere-compresiune

În general, dacă arcul este deformat de la o lungime inițială l_0 la o lungime *l*, forța elastică F_e din arc este proporțională cu alungirea $\Delta l = l - l_0$, adică are loc următoarea relație experimentală:

$$F_e = -k_e \Delta l \,. \tag{11.232}$$

Această relație se numește legea lui Hooke, după numele savantului englez Robert Hooke (1635-1703). Ea arată că forța elastică este proporțională cu deformația arcului și este orientată în sens opus direcției de deplasare. Constanta elastică k_e se determină experimental.

11.11 . Dinamica punctului material supus la legături

Punctul material supus la legături este echivalent cu un punct material liber atunci când legăturile sunt înlocuite cu forțele de legătură confom axiomei legăturilor. Dacă se notează cu *m* masa punctului material, cu $\overline{R}$ rezultanta forțelor de legătură și cu $\overline{F}$ rezultanta celorlalte forțe care acționează asupra punctului, denumite și forțe date, atunci ecuația de mișcare pentru punctul material supus la legături se scrie:

$$m\overline{a} = \overline{F} + \overline{R} \,, \tag{11.233}$$

$$t = 0, \quad \overline{r}(0) = \overline{r}_0, \quad \dot{\overline{r}}(0) = \overline{v}_0 \,. \tag{11. 234}$$

Problema are ca necunoscute legea de mișcare și forțele de legătură. Pentru a o putea rezolva, este necesar să se adauge și ecuațiile de legătură.

Ca metode de rezolvare se utilizează de multe ori teorema energiei cinetice sub formă finită (11.65) sau, când este cazul, teorema conservării energiei mecanice (11.74).

Se remarcă faptul că lucrul mecanic al reacțiunii normale $\overline{N}$ este nul, deoarece aceasta fiind perpendiculară pe tangentă, deci pe direcția vitezei, are loc relația:

$$dL = \overline{N} \cdot d\overline{r} = \overline{N} \cdot \overline{v} dt = 0 . \qquad (11.235)$$

11.11.1. Pendulul matematic

Un punct material supus la legături este un pendul matematic sau un pendul simplu atunci când este obligat să se mişte fără frecare pe un cerc situat într-un plan vertical numai sub acțiunea greutății. Legătura poate fi realizată printr-o tijă sau cu un tub circular vertical caz în care face parte din categoria legăturilor bilaterale care nu permit părăsirea legăturii pe direcție normală la cerc (Fig. 11.12). De asemenea legătura poate fi realizată printr-un fir sau printr-un jgheab circular caz în care face parte din categoria legăturilor unilaterale care permit părăsirea legăturii pe direcție normală la cerc (punctul poate ”cădea” în interiorul cercului în anumite condiții) (Fig.11.13).

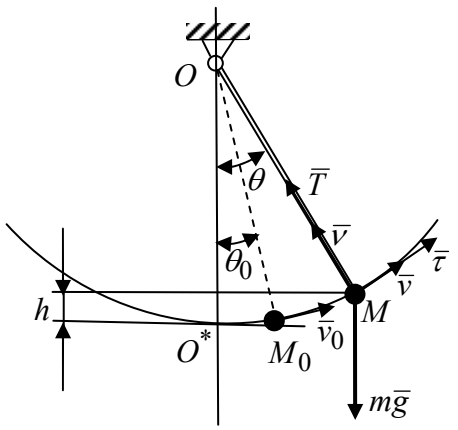

Fig. 11.12 Pendulul matematic cu legătură bilaterală (tijă).

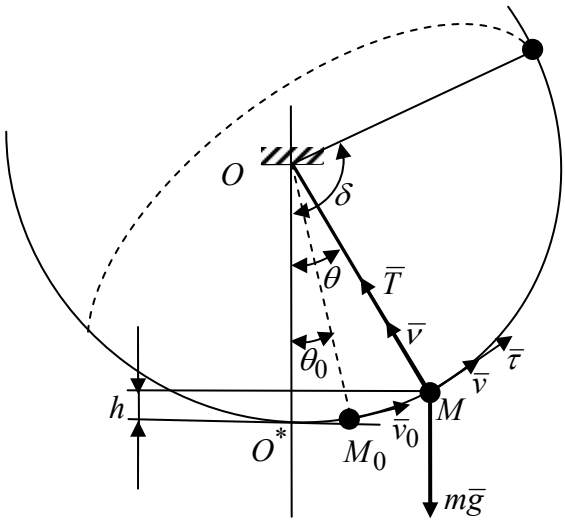

Fig.11.13. Pendulul matematic cu legătură unilaterală (fir).

Se consideră mai întâi cazul legăturii bilaterale. Legea a doua a lui Newton se scrie:

$$m\overline{a} = \overline{T} + \overline{G} , \qquad (11.236)$$

unde $\overline{T}$ este tensiunea în tijă şi $\overline{G} = m\overline{g}$ este greutatea punctului material. Dacă se notează cu l lungimea tijei, atunci între lungimea s a arcului de cerc şi unghiul la centru θ corespunzător exprimat în radiani, se poate scrie relația de legătură:

$$s = l\theta . \qquad (11.237)$$

Prin derivarea relației anterioare se obțin relațiile:

$$\dot{s} = v = l\dot{\theta} = l\omega, \tag{11.238}$$

în care $\dot{\theta} = \omega$ este viteza unghiulară și respectiv

$$\ddot{s} = l\ddot{\theta} = l\varepsilon, \tag{11.239}$$

în care $\ddot{\theta} = \varepsilon$ este accelerația unghiulară.

Deoarece traiectoria punctului este circulară, deci are formă cunoscută, pentru studiul mișcării se utilizează coordonatele intrinseci. Viteza punctului material este:

$$\overline{v} = \dot{s}\overline{\tau} = l\dot{\theta}\overline{\tau} = l\omega\overline{\tau}, \tag{11.240}$$

iar accelerația este:

$$\overline{a} = \ddot{s}\overline{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{l}\overline{\nu} = l\ddot{\theta}\overline{\tau} + l\dot{\theta}^2\overline{\nu} = l\varepsilon\overline{\tau} + \frac{v^2}{l}\overline{\nu} = l\varepsilon\overline{\tau} + l\omega^2\overline{\nu}. \tag{11.241}$$

Proiectând relația (11.236) pe axele triedrului Serret-Frenet (figura 11.12) și ținând cont de relațiile (11.240) și (11.241), rezultă următoarea formă a ecuațiilor diferențiale de mișcare:

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta, \tag{11.242}$$

$$m\frac{v^2}{l} = T - mg\cos\theta. \tag{11.243}$$

La momentul inițial $t = 0$, se consideră că punctul face cu direcția verticală unghiul θ_0 și are viteza inițială v_0 (figura 11.12), ceea ce conduce la valoarea inițială a vitezei unghiulare $\omega(0) = \dot{\theta}(0) = \omega_0 = \frac{v_0}{l}$.

Ecuația (11.242) se poate integra o dată folosind un artificiu ce constă în înmulțirea ecuației cu $2\dot{\theta}$. Se obține:

$$2ml\dot{\theta}\ddot{\theta} = -2mg\dot{\theta}\sin\theta. \tag{11.244}$$

Prin integrarea relației de mai sus rezultă:

$$ml\dot{\theta}^2 = 2mg\cos\theta + C, \tag{11.245}$$

unde C este o constantă de integrare care se determină folosind condițiile inițiale precizate mai înainte. Valoarea constantei de integrare este:

$$C = ml\omega_0^2 - 2mg\cos\theta_0. \tag{11.246}$$

Înlocuind valoarea constantei C în relația (11.245), se obține următoarea expresie a pătratului vitezei unghiulare:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{2g}{l}(\cos\theta_0 - \cos\theta), \tag{11.247}$$

Această ecuație se poate scrie în funcție de viteza liniară pe baza relației (11.238), sub forma:

$$v^2 = v_0^2 - 2gl(\cos\theta_0 - \cos\theta). \tag{11.248}$$

Integrarea analitică se oprește aici, neputându-se obține o funcție care să arate variația în timp a unghiului θ.

Relația (11.248) se deduce mult mai simplu prin aplicarea legii conservării energiei mecanice. Dacă se consideră că în poziția $\theta = 0$ energia potențială este nulă, atunci energia potențială a punctului este:

$$mgh = mg(l - l\cos\theta)\,. \tag{11.249}$$

Egalitatea dintre energia mecanică inițială și energia mecanică de la un moment ulterior se scrie:

$$\frac{mv_0^2}{2} + mg(l - l\cos\theta_0) = \frac{mv^2}{2} + mg(l - l\cos\theta)\,, \tag{11.250}$$

din care se obține:

$$v^2 = v_0^2 - 2gl(\cos\theta_0 - \cos\theta)\,. \tag{11.251}$$

Relația de mai sus permite aflarea unghiului θ pentru care se anulează viteza punctului, al cărui cosinus are expresia:

$$\cos\theta = \frac{2gl\cos\theta_0 - v_0^2}{2gl}\,. \tag{11.252}$$

Pentru ca să existe un unghi pentru care să se anuleze viteza punctului, moment în care punctul se oprește și se mișcă în sens invers executând apoi o mișcare oscilatorie în jurul poziției celei mai de jos a punctului dată de $\theta = 0$, trebuie ca:

$$-1 < \frac{2gl\cos\theta_0 - v_0^2}{2gl} < 1\,. \tag{11.253}$$

Inegalitatea de mai sus conduce la:

$$v_0^2 < 2gl\cos\theta_0 + 2gl \tag{11.254}$$

Prin urmare, dacă viteza inițială satisface inegalitatea de mai sus, mișcarea punctului este oscilatorie. Dacă viteza punctului satisface egalitatea

$$v_0^2 = 2gl\cos\theta_0 + 2gl\,, \tag{11.255}$$

atunci punctul se oprește în poziția $\theta = \pm\pi$, adică în poziția cea mai de sus se pe cerc. Această poziție este însă asimptotică, deoarece, dacă se fac calculele, rezultă un timp infinit pentru a o atinge (Voinea R., Voiculescu D.,Ceaușu V., Mecanica, E.D.P., București, 1983, pag.312). Dacă viteza inițială satisface inegalitatea

$$v_0^2 > 2gl\cos\theta_0 + 2gl\,, \tag{11.256}$$

atunci punctul se va roti la nesfârșit pe cerc, viteza punctului nemaiputând lua valoarea zero deoarece ecuația (11.252) nu are soluție.

Tensiunea din tijă se calculează din relația (11.243) unde viteza punctului este dată de (11.251):

$$T = m\frac{v^2}{l} + mg\cos\theta = \frac{m}{l}(v_0^2 - 2gl\cos\theta_0 + 3gl\cos\theta) \tag{11.257}$$

Această tensiune se anulează când

$$\cos\theta = \frac{2gl\cos\theta_0 - v_0^2}{3gl}. \tag{11.258}$$

Pentru a exista o poziție în care tensiunea din tijă să fie nulă, trebuie ca:

$$-1 < \frac{2gl\cos\theta_0 - v_0^2}{3gl} < 1, \tag{11.259}$$

ceea ce înseamnă că pătratul vitezei trebuie să satisfacă inegalitatea:

$$v_0^2 < 2gl\cos\theta_0 + 3gl. \tag{11.260}$$

În concluzie pot să apară următoarele situații:

1. $0 < v_0^2 < 2gl\cos\theta_0$, situație în care viteza punctului se anulează înainte de anularea a tensiunii în tijă iar punctul se mișcă oscilatoriu în jurul poziției verticale, unghiul θ fiind cuprins în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right)$;
2. $v_0^2 = 2gl\cos\theta_0$, situație în care viteza punctului și tensiunea în tijă se anulează simultan când unghiul θ ia valorile $-\frac{\pi}{2}$ și respectiv $+\frac{\pi}{2}$, punctul mișcându-se oscilatoriu în jurul poziției verticale, unghiul θ fiind cuprins în intervalul $\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$;
3. $2gl\cos\theta_0 < v_0^2 < 2gl\cos\theta_0 + 2gl$, situație în care mai întâi se anulează tensiunea din tijă ea trecând de la producerea întinderii tijei la producerea comprimării acesteia, trecere care are loc după depășirea poziției orizontale a tijei. Anularea vitezei se produce după depășirea poziției de anulare a tensiunii din tijă dar fără a se depăși poziția verticală a pendulului, punctul mișcându-se oscilatoriu în jurul poziției verticale, unghiul θ fiind cuprins în intervalul $(-\pi,+\pi)$;
4. $v_0^2 = 2gl\cos\theta_0 + 2gl$, situație în care punctul se îndreaptă asimptotic către poziția verticală în care viteza sa trebuie să fie zero. Tensiune din tijă își schimbă sensul după ce punctul depășește poziția orizontală;
5. $2gl\cos\theta_0 + 2gl < v_0^2 < 2gl\cos\theta_0 + 3gl$, situație în care punctul are o mișcare de rotație continuă iar tensiunea în tijă își schimbă ciclic sensul o dată în intervalul $\theta \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ trecând

de la întindere la compresiune și apoi încă o dată în intervalul $\theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ trecând de la compresiune la întindere;

6. $2gl\cos\theta_0 + 3gl = v_0^2$, situație în care punctul are o mișcare de rotație continuă iar tensiunea din tijă se anulează în poziția cea mai de sus a pendulului când $\theta = \pi$;
7. $2gl\cos\theta_0 + 3gl < v_0^2$, situație în care punctul are o mișcare de rotație continuă iar tensiunea din tijă nu se anulează, ea producând numai întinderea tijei.

În cazul legăturii unilaterale ecuațiile de mișcare sunt tot (11.242) și (11.243) iar viteza și tensiunea în fir sunt date de (11.251) și (11.257). Discuția asupra modului de mișcare a punctului este similară cu aceea din cazul legăturii bilaterale cu precizarea că, atunci când se anulează tensiunea din fir înainte anulării vitezei punctului, legătura se desface și punctul ”cade” în interiorul cercului (Fig. 11.13). În funcție de mărimea vitezei inițiale, pot să apară următoarele situații:

1. $0 < v_0^2 < 2gl\cos\theta_0$, situație în care viteza punctului se anulează înainte de anularea a tensiunii în tijă iar punctul se mișcă oscilatoriu în jurul poziției verticale, unghiul θ fiind cuprins în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$;
2. $v_0^2 = 2gl\cos\theta_0$, situație în care viteza punctului și tensiunea în tijă se anulează simultan când unghiul θ ia valorile $-\frac{\pi}{2}$ și respectiv $+\frac{\pi}{2}$, punctul mișcându-se oscilatoriu în jurul poziției verticale, unghiul θ fiind cuprins în intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$;
3. $2gl\cos\theta_0 < v_0^2 \le 2gl\cos\theta_0 + 3gl$, situație în care, mai întâi, se anulează tensiunea din fir când unghiul θ are valoarea dată de egalitatea (11.258). În acel moment viteza punctului nu este nulă și acesta va părăsi legătura și se va îndrepta spre interiorul cercului după cum se arată în figura 11.13. Fenomenul are loc între poziția orizontală și cea verticală a pendulului unghiul θ fiind cuprins în intervalul $\left(+\frac{\pi}{2}, +\pi\right]$.
4. $2gl\cos\theta_0 + 3gl < v_0^2$, situație în care punctul are o mișcare de rotație continuă iar tensiunea din fir nu se anulează.

Un caz particular important este cel al micilor oscilații. Micile oscilații sunt considerate cele care au o amplitudine mai mică decât 5°. Pentru astfel de valori mici ale unghiului θ, putem face aproximația:

$$\sin\theta \cong \theta . \tag{11.261}$$

Ecuația diferențială (11.242) capătă, pe baza acestei aproximații, forma simplificată:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 . \qquad (11.262)$$

Condițiile inițiale sunt:

$$\theta(0) = \theta_0 \text{ și } \dot{\theta}(0) = \omega_0 = \frac{v_0}{l} \qquad (11.263)$$

Dacă se face notația:

$$k^2 = \frac{g}{l}, \qquad (11.264)$$

atunci ecuația diferențială (11.262) capătă forma (11.212) care, după cum s-a arătat, conduce la o mișcare oscilatorie armonică având legea de mișcare:

$$\theta = A\sin(kt + \alpha), \qquad (11.265)$$

unde amplitudinea oscilației este:

$$A = \sqrt{\theta_0^2 + \frac{\omega_0^2 l}{g}} = \sqrt{\theta_0^2 + \frac{v_0^2}{gl}}, \qquad (11.266)$$

iar faza inițială este:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\theta_0}{\omega_0}\sqrt{\frac{g}{l}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\theta_0}{v_0}\sqrt{gl}\right) \qquad (11.267)$$

Perioada micilor oscilații va fi:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} . \qquad (11.268)$$

În cazul în care viteza inițială este nulă, adică pendulul este scos cu un unghi θ_0 mai mic de 5° din poziția verticală de echilibru și apoi eliberat, oscilațiile armonice se vor produce după legea:

$$\theta = \theta_0 \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t) = \theta_0 \sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \frac{\pi}{2}) \qquad (11.269)$$

și vor avea aceeași perioada ca în cazul în care viteza inițială era nenulă, adică cea dată de formula (11.268).

11.11.2. Pendulul sferic

Pendulul sferic este format dintr-un punct material supus la legături care este constrâns să se miște fără frecare pe o suprafață sferică numai sub acțiunea greutății. Vom considera cazul în care legătura este formată dintr-o tijă de lungime l care are la un capăt punctul material de masă m și la celălalt capăt o articulație sferică care permite rotația spațială a tijei (fig. 11.14). Pentru studierea mișcării se vor folosi coordonatele sferice. Coordonata r este constantă și egală cu lungimea l a

pendulului sferic și, prin urmare, derivatele acestei coordonate vor fi nule. Ecuațiile de mișcare ale pendulului sferic, deduse pe baza componentelor accelerației în coordonate sferice prezentate în capitolul consacrat cinematicii punctului și a figurii 11.14, sunt:

$$m(-l\dot{\theta}^2 - l\dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi) = T - mg\cos\theta\,; \tag{11.270}$$

$$m(l\ddot{\theta} - l\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta) = mg\sin\theta\,; \tag{11.271}$$

$$m(l\ddot{\varphi}\sin\theta + 2l\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta) = 0\,. \tag{11.272}$$

Din ecuația (11.272) se obține o primă ecuație diferențială de ordinul al doilea, neliniară având ca necunoscute unghiurile θ și φ:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta}{\sin\theta} \tag{11.273}$$

Din ecuația (11.271) se obține o a doua ecuație diferențială de ordinul al doilea, neliniară cu aceleași necunoscute:

$$\ddot{\theta} = \frac{g\sin\theta + l\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta}{l} \tag{11.274}$$

Sistemul de ecuații diferențiale (11.273) și (11.274) poate fi integrat numeric în condiții

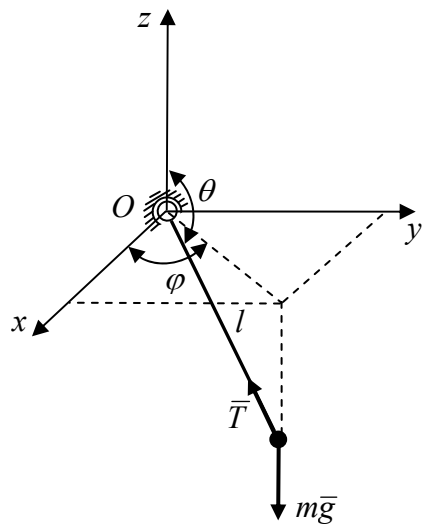

Fig. 11.14 Pendulul sferic

inițiale date pentru determinarea unghiurilor θ și φ. Din ecuația (11.270) se poate determina apoi tensiunea din tijă. Există totuși posibilitatea determinării a două integrale prime furnizate de aplicarea conservării momentului cinetic pe direcția axei Oz și respectiv de conservarea energiei mecanice cu condiția considerată de neglijare a frecărilor.

Deoarece dreapta suport a tensiunii din tijă trece cu prin polul O, însemnă că momentul acestei forțe în raport cu acest pol este nul, deci și momentul axial în raport cu axa Oz. Pe de altă parte, forța de greutate a punctului este paralelă cu axa Oz, ceea ce înseamnă că momentul axial în

raport cu această axă este nul. În aceste condiții, rezultă că pe direcția axei Oz are loc conservarea momentului cinetic.

Coordonatele punctului material de masă *m*, conform figurii 11.14, sunt:

$$x = l\sin\theta\cos\varphi\,; \tag{11.275}$$

$$y = l\sin\theta\sin\varphi\,; \tag{11.276}$$

$$z = l\cos\theta\,. \tag{11.277}$$

Prin derivarea coordonatelor punctului în raport cu timpul, se obțin componente vitezei acestuia:

$$\dot{x} = l\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - l\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi\,; \tag{11.278}$$

$$\dot{y} = l\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi - l\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi\,; \tag{11.279}$$

$$\dot{z} = -l\dot{\theta}\sin\theta\,. \tag{11.280}$$

Determinantul care furnizează expresia momentului cinetic este:

$$\overline{K}_O = \overline{r}\times m\overline{v} = m\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}. \tag{11.281}$$

Componenta momentului cinetic după direcția axei *Oz* este constantă, adică are loc relația:

$$m(x\dot{y} - y\dot{x}) = \text{constant}\,. \tag{11.282}$$

Substituind coordonatele punctului (11.275), (11.276) și componentele vitezei (11.278) și (11.279) în (11.282) se obține:

$$ml^2\dot{\varphi}\sin^2\theta = \text{constant}\,. \tag{11.283}$$

Această relație trebuie să fie adevărată și pentru condițiile inițiale $\theta(0) = \theta_0$ și $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$, care, prin înlocuire în (11.283), vor furniza valoarea constantei:

$$ml^2\dot{\varphi}_0\sin^2\theta_0 = \text{constant}\,. \tag{11.284}$$

Egalând expresiile date de (11.283) și (11.284) se obține integrala primă:

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}_0\sin^2\theta_0}{\sin^2\theta}\,. \tag{11.285}$$

Cea de a doua integrală primă rezultă din conservarea energiei mecanice. Energia cinetică a punctului este:

$$E = \frac{1}{2}m\overline{v}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\,. \tag{11.286}$$

Dacă se consideră energia potențială a punctului ca fiind zero în poziția cea mai de jos a acestuia, adică pentru $z = -l$, atunci expresia energiei potențiale este:

$$V = mgl(1 + \cos\theta)\,. \tag{11.287}$$

Conservarea energiei mecanice afirmă că suma dintre energia cinetică și cea potențială la un moment oarecare este egală cu suma dintre energia cinetică și cea potențială la momentul inițial $t = 0$.

$$E + V = E(0) + V(0). \tag{11.288}$$

Dacă condițiile inițiale sunt

$$\theta(0) = \theta_0,\ \varphi(0) = \varphi_0,\ \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0 \text{ și } \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, \tag{11.289}$$

atunci are loc egalitatea:

$$\frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) + mgl(1+\cos\theta) = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_0{}^2 + \dot{\varphi}_0{}^2 \sin^2\theta_0) + mgl(1+\cos\theta_0). \tag{11.290}$$

Din (11.290) și folosind integrala primă (11.285), se obține a doua integrală primă:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0) + \dot{\varphi}_0^2 \sin^2\theta_0 \left(1 - \frac{\sin^2\theta_0}{\sin^2\theta}\right). \tag{11.291}$$

Integralele prime (11.285) și (11.291) se pot folosi la studiul derivatelor unghiurilor θ și φ dar ele nu mai pot fi integrate analitic încă o dată pentru a obține expresiile de calcul ale acestor unghiuri.

11.12. Dinamica mișcării relative a punctului material

Se consideră un punct material de masă m care execută o mișcare relativă în raport cu un rigid (S) ce efectuează mișcarea de transport. Asupra punctului acționează rezultanta forțelor date $\overline{F}$ dar și rezultanta forțelor de legătură $\overline{R}$. Se consideră cunoscută mișcarea de transport și se pune problema determinării mișcării relative, a poziției de echilibru relativ în raport cu rigidul (S) în cazul în care există o astfel de poziție precum și reacțiunile legăturilor. Dacă se notează accelerația absolută cu $\overline{a}_a$, conform legii a doua a lui Newton, are loc relația:

$$m\overline{a}_a = \overline{F} + \overline{R}. \tag{11.292}$$

Pe de altă parte, accelerația absolută este suma dintre accelerația de transport $\overline{a}_t$, accelerația relativă $\overline{a}_r$ și accelerația Coriolis (denumită și accelerația complementară) $\overline{a}_c$, adică relația (11.292) se poate scrie detaliat:

$$m(\overline{a}_t + \overline{a}_r + \overline{a}_c) = \overline{F} + \overline{R}. \tag{11.293}$$

Din relația (11.293) se obține ecuația dinamicii mișcării relative care are forma:

$$m\overline{a}_r = \overline{F} + \overline{R} - m\overline{a}_t - m\overline{a}_c. \tag{11.294}$$

Ecuația se mai scrie:

$$m\overline{a}_r = \overline{F} + \overline{R} + \overline{F}_t^i + \overline{F}_c^i, \tag{11.295}$$

unde s-a notat $-m\overline{a}_t$ cu $\overline{F}_t^i$ ceea ce înseamnă forța de inerție de transport și $-m\overline{a}_c$ cu $\overline{F}_c^i$ ceea ce înseamnă forța de inerție Coriolis. Cunoscând la momentul $t=0$ poziția punctului față de rigidul (*S*) (poziția relativă) și viteza punctului față de rigidul (*S*) (viteza relativă), se poate obține, prin integrarea relației (11.295), legea mișcării relative pentru condițiile inițiale precizate.

Un caz particular important îl reprezintă acela în care mișcarea de transport este o translație rectilinie și uniformă. În această situație atât accelerația de transport cât și accelerația Coriolis sunt nule, ceea ce conduce la anularea forțelor de inerție corespunzătoare. Relația (11.295) capătă forma particulară:

$$m\overline{a}_r = \overline{F} + \overline{R}\,. \tag{11.296}$$

Această relație este identică cu cea care se scrie față de un reper fix. Reperele în raport cu care ecuația de mișcare este identică cu cea scrisă față de un reper fix se numesc repere inerțiale. Într-un reper inerțial izolat de exterior nu se poate determina prin experimente mecanice dacă acesta se află în repaus sau în mișcare rectilinie și uniformă.

11.12.1. Echilibrul relativ

Poziția de echilibrului relativ înseamnă o poziție a punctului în raport cu solidul (*S*) care execută mișcare de transport, deci o poziție relativă, în care, dacă așezăm punctul cu viteză relativă inițială nulă, acesta rămâne în repaus față de rigidul (*S*). Pentru a găsi poziția de echilibru relativ se consideră mai întâi că viteza relativă este nulă

$$\overline{v}_r = 0\,. \tag{11.297}$$

În consecință, se anulează accelerația relativă și accelerația Coriolis:

$$\overline{a}_r = 0 \text{ și } \overline{a}_c = 2\overline{\omega}_t \times \overline{v}_r = 0\,. \tag{11.298}$$

Ecuația de echilibru relativ este:

$$\overline{F} + \overline{R} + \overline{F}_t^i = 0\,. \tag{11.299}$$

Această relație vectorială se proiectează de regulă pe axele reperului solidar cu rigidul (*S*), deci pe axele reperului mobil, și are ca necunoscute coordonatele punctului față de acest repere care stabilesc poziția de echilibru relativ (dacă există o astfel de poziție) și componentele forțelor de reacțiune.

11.12.2. O problemă de dinamica mișcării relative a punctului material

Se consideră un punct material de masă *m* care se poate deplasa cu frecare neglijabilă de-a lungul unei tije orizontale care se rotește cu viteză unghiulară constantă $\overline{\omega}_0 = \omega_0\overline{k} = \omega_0\overline{k}''$ în jurul

unei axe verticale (fig. 11.15). Punctul material este prins de axa verticală prin intermediul unui arc care are constanta elastică k_e și care este așezat în lungul tijei orizontale. Reperele sunt notate conform cinematicii mișcării relative a punctului și sunt orientate așa cum se poate vedea în figura 11.15. Mișcarea de transport, executată de tija orizontală, este una de rotație în jurul axei fixe $Oz = Wz''$ cu viteză unghiulară constantă $\overline{\omega}_t = \omega_0 \overline{k} = \omega_0 \overline{k}''$ iar mișcarea relativă a punctului este o mișcare rectilinie în lungul tijei orizontale ce coincide cu axa Wx''. Se dorește determinarea mișcării relative și a poziției de echilibru relativ.

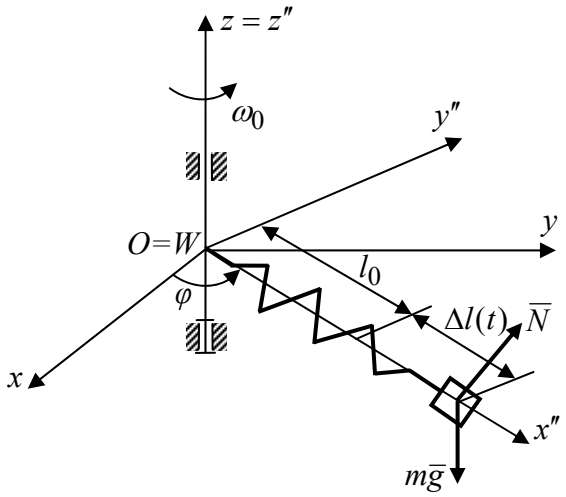

Fig.11.15 Dinamica mișcării relative a punctului

Se presupune că la momentul inițial $t = 0$ condițiile inițiale ale mișcării relative sunt $x''(0) = l_0$ (moment în care se consideră că arcul este netensionat) și $\dot{x}''(0) = 0$ ceea ce arată că viteza relativă inițială este zero. Asupra punctului acționează forța elastică $\overline{F}_e = -k_e x'' \overline{i}''$, forța de greutate $m\overline{g} = -mg\overline{k}''$ și reacțiunea normală $\overline{N} = N_y \overline{j}'' + N_z \overline{k}''$ perpendiculară pe tija orizontală dar neparalelă cu direcția verticală, adică cu componente după direcțiile axelor Wy'' și Wz''.

Vectorul de poziție al punctului în mișcarea relativă este:

$$\overline{r}'' = (l_0 + \Delta l(t))\overline{i}'', \tag{11.300}$$

unde $\Delta l(t)$ reprezintă alungirea resortului datorită mișcării de transport, alungire care se modifică în timp. Rezultă că viteza relativă este:

$$\overline{v}_r = \dot{\Delta} l(t)\overline{i}'', \tag{11.301}$$

iar accelerația relativă este:

$$\overline{a}_r = \ddot{\Delta} l(t)\overline{i}''. \tag{11.302}$$

Accelerația de transport este o mișcare de rotație cu viteză unghiulară constantă $\overline{\omega}_t = \omega_0 \overline{k}''$ în jurul unei axei fixe Wz'' și are expresia analitică:

$$\bar{a}_a = \bar{\omega}_t \times (\bar{\omega}_t \times \bar{r}'') = -(l_0 + \Delta l(t))\omega_0^2 \bar{i}''. \tag{11.303}$$

Accelerația Coriolis este:

$$\vec{a}_c = 2\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r = 2\dot{\Delta}(t)\omega_0 \bar{j}''. \tag{11.304}$$

Ecuația diferențială vectorială a mișcării relative (11.296) capătă pentru acest caz particular forma:

$$m\ddot{\Delta}l(t)\bar{i}'' = -mg\bar{k}'' + N_y \bar{j}'' + N_z \bar{k}'' - k_e \Delta l(t)\bar{i}'' + m(l_0 + \Delta l(t))\omega_0^2 \bar{i}'' - 2m\dot{\Delta}l(t)\omega_0 \bar{j}''. \tag{11.305}$$

Din relația de mai sus rezultă următoarele trei ecuații scalare:

$$m\ddot{\Delta}l(t) = -k_e \Delta l(t) + m(l_0 + \Delta l(t))\omega_0^2; \tag{11.306}$$

$$0 = +N_y - 2m\dot{\Delta}l(t)\omega_0; \tag{11.307}$$

$$0 = -mg + N_z. \tag{11.308}$$

Ecuația diferențială (11.306) are ca necunoscută alungirea arcului Δl și se mai scrie:

$$\ddot{\Delta}l(t) + \left(\frac{k_e}{m} - \omega_0^2\right)\Delta l(t) = l_0\omega_0^2. \tag{11.309}$$

Ecuația caracteristică a ecuației diferențiale omogene:

$$\ddot{\Delta}l(t) + \left(\frac{k_e}{m} - \omega_0^2\right)\Delta l(t) = 0 \tag{11.310}$$

este:

$$r^2 + \frac{k_e}{m} - \omega_0^2 = 0. \tag{11.311}$$

În funcție de poziția față de zero a expresiei $\frac{k_e}{m} - \omega_0^2$, există trei situații posibile:

1. $\frac{k_e}{m} - \omega_0^2 > 0$

În acest caz soluțiile ecuației caracteristice sunt imaginare:

$$r_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k_e}{m} - \omega_0^2}, \tag{11.312}$$

ceea ce conduce la următoarea formă a soluției ecuației diferențiale omogene (11.310):

$$\Delta l(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k_e}{m} - \omega_0^2}\ t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k_e}{m} - \omega_0^2}\ t\right), \tag{11.313}$$

în care C_1 și C_2 sunt constante de integrare care se determină folosind condițiile inițiale.

O soluție particulară a ecuației neomogene (11.309) se alege de forma membrului drept adică o constantă A. Impunând condiția ca această constantă să verifice ecuația neomogenă, se obține:

$$A = \frac{l_0\omega_0^2}{\frac{k_e}{m} - \omega_0^2}. \tag{11.314}$$

Soluția generală a ecuației diferențiale (11.309) este suma dintre soluția generală a ecuației omogene și soluția particulară a ecuației neomogene:

$$\Delta l(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k_e}{m} - \omega_0^2}\ t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k_e}{m} - \omega_0^2}\ t\right) + \frac{l_0\omega_0^2}{\frac{k_e}{m} - \omega_0^2}. \tag{11.315}$$

Derivata în raport cu timpul a soluției (11.315) este:

$$\dot{\Delta} l(t) = -C_1\sqrt{\frac{k_e}{m} - \omega_0^2}\ \sin\left(\sqrt{\frac{k_e}{m} - \omega_0^2}\ t\right) + C_2\sqrt{\frac{k_e}{m} - \omega_0^2}\ \cos\left(\sqrt{\frac{k_e}{m} - \omega_0^2}\ t\right). \tag{11.316}$$

Impunând condițiile inițiale $\Delta l(0) = 0$ și $\dot{\Delta} l(0) = 0$, se obțin următoarele valori pentru constantele C_1 și C_2:

$$C_1 = -\frac{l_0\omega_0^2}{\frac{k_e}{m} - \omega_0^2} \text{ și } C_2 = 0. \tag{11.317}$$

Folosind aceste valori, rezultă următoarea soluție a ecuației diferențiale (11.309):

$$\Delta l(t) = -\frac{l_0\omega_0^2}{\frac{k_e}{m} - \omega_0^2}\cos\left(\sqrt{\frac{k_e}{m} - \omega_0^2}\ t\right) + \frac{l_0\omega_0^2}{\frac{k_e}{m} - \omega_0^2}. \tag{11.318}$$

Ținând cont de faptul că din relația (11.300) rezultă:

$$x'' = l_0 + \Delta l(t), \tag{11.319}$$

se obține următoarea formă a legii mișcării relative a punctului în cazul $\frac{k_e}{m} - \omega_0^2 > 0$:

$$x'' = l_0 + \frac{l_0\omega_0^2}{\frac{k_e}{m} - \omega_0^2} - \frac{l_0\omega_0^2}{\frac{k_e}{m} - \omega_0^2}\cos\left(\sqrt{\frac{k_e}{m} - \omega_0^2}\ t\right) = l_0 + \frac{l_0\omega_0^2}{\frac{k_e}{m} - \omega_0^2}\left(1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k_e}{m} - \omega_0^2}\ t\right)\right) \tag{11.320}$$

Această lege de mișcare arată că punctul are o mișcare oscilatorie armonică cu centrul de oscilație situat pe axa Wx'' la distanța $l_0 + \frac{l_0\omega_0^2}{\frac{k_e}{m} - \omega_0^2}$ față de polul W și având amplitudinea $\frac{l_0\omega_0^2}{\frac{k_e}{m} - \omega_0^2}$.

2. $\frac{k_e}{m} - \omega_0^2 > 0$

În acest caz ecuația diferențială (11.309) capătă forma:

$$\ddot{\Delta} l(t) = l_0\omega_0^2, \tag{11.321}$$

care arată că mișcarea relativă este rectilinie uniform accelerată și are legea de mișcare:

$$x'' = l_0 + l_0\omega_0^2 \frac{t^2}{2}. \tag{11.322}$$

3. $\frac{k_e}{m} - \omega_0^2 < 0$

În acest caz soluțiile ecuației caracteristice sunt reale și distincte:

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{\omega_0^2 - \frac{k_e}{m}} \tag{11.323}$$

ceea ce conduce la următoarea formă a soluției ecuației diferențiale omogene (11.310):

$$\Delta l(t) = C_1 e^{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{k_e}{m}}t} + C_2 e^{-\sqrt{\omega_0^2 - \frac{k_e}{m}}t}, \tag{11.324}$$

în care C_1 și C_2 sunt constante de integrare care se determină folosind condițiile inițiale.

O soluție particulară a ecuației neomogene (11.309) se alege de forma membrului drept adică o constantă A. Impunând condiția ca această constantă să verifice ecuația neomogenă, se obține:

$$A = \frac{l_0\omega_0^2}{\frac{k_e}{m} - \omega_0^2}. \tag{11.325}$$

Soluția generală a ecuației diferențiale (11.309) este suma dintre soluția generală a ecuației omogene și soluția particulară a ecuației neomogene:

$$\Delta l(t) = C_1 e^{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{k_e}{m}}t} + C_2 e^{-\sqrt{\omega_0^2 - \frac{k_e}{m}}t} + \frac{l_0\omega_0^2}{\frac{k_e}{m} - \omega_0^2}. \tag{11.326}$$

Derivata în raport cu timpul a soluției (11.312) este:

$$\dot{\Delta} l(t) = C_1\sqrt{\omega_0^2 - \frac{k_e}{m}} e^{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{k_e}{m}}t} - C_2\sqrt{\omega_0^2 - \frac{k_e}{m}} e^{-\sqrt{\omega_0^2 - \frac{k_e}{m}}t}. \tag{11.327}$$

Impunând condițiile inițiale $\Delta l(0) = 0$ și $\dot{\Delta} l(0) = 0$, se obțin următoarele valori pentru constantele C_1 și C_2:

$$C_1 = C_2 = -\frac{l_0\omega_0^2}{2\left(\frac{k_e}{m} - \omega_0^2\right)}. \tag{11.328}$$

Folosind aceste valori, rezultă următoarea soluție a ecuației diferențiale (11.309):

$$\Delta l(t) = -\frac{l_0\omega_0^2}{2\left(\frac{k_e}{m} - \omega_0^2\right)} e^{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{k_e}{m}}t} - \frac{l_0\omega_0^2}{2\left(\frac{k_e}{m} - \omega_0^2\right)} e^{-\sqrt{\omega_0^2 - \frac{k_e}{m}}t} + \frac{l_0\omega_0^2}{\frac{k_e}{m} - \omega_0^2} \tag{11.329}$$

Ținând cont de relația (11.319), se obține următoarea formă a legii mișcării relative a punctului în cazul $\frac{k_e}{m} - \omega_0^2 < 0$:

$$x'' = l_0 + \frac{l_0\omega_0^2}{2\left(\omega_0^2 - \frac{k_e}{m}\right)} e^{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{k_e}{m}}t} + \frac{l_0\omega_0^2}{2\left(\omega_0^2 - \frac{k_e}{m}\right)} e^{-\sqrt{\omega_0^2 - \frac{k_e}{m}}t} + \frac{l_0\omega_0^2}{\frac{k_e}{m} - \omega_0^2}. \qquad (11.330)$$

Această lege de mișcare arată că punctul are o deplasare relativă exponențială care are limita infinit când timpul tinde la infinit.

Se poate pune problema poziției de echilibru relativ care se determină impunând condiția ca viteza relativă și accelerația relativă să fie nule. În acest caz, conform (11.301) și (11.302), acest lucru se reduce la $\dot{\Delta l} = 0$ și $\ddot{\Delta l} = 0$. Ecuația (11.309) furnizează valoarea pentru echilibru relativ Δl_{er} a alungirii arcului:

$$\Delta l_{er} = \frac{l_0\omega_0^2}{\frac{k_e}{m} - \omega_0^2}. \qquad (11.331)$$

Poziția de echilibru relativ a punctului notată x''_{er} se obține din relația (11.300):

$$x''_{er} = l_0 + \Delta l_{er} = l_0 + \frac{l_0\omega_0^2}{\frac{k_e}{m} - \omega_0^2} = l_0 \frac{k_e}{m} \frac{1}{\frac{k_e}{m} - \omega_0^2} \qquad (11.332)$$

Deoarece x''_{er} este o mărime pozitivă, înseamnă că această poziție de echilibru relativ există numai dacă $\frac{k_e}{m} - \omega_0^2 > 0$ deci numai în situația 1 dintre cele trei prezentate mai sus. Poziția de echilibru relativ se interpretează astfel: mai întâi se fixează punctul la distanța x''_{er} și apoi, când mișcarea de transport are loc cu viteza unghiulară constantă ω_0 care satisface relația (11.332), punctul este eliberat însă el va rămâne imobil în raport cu tija orizontală pe care stă, adică nu va mai avea loc acea mișcare relativă oscilatorie din situația 1.

11.13. Dinamica sistemelor de puncte materiale

Prin sistem de puncte materiale se înțelege un număr de corpuri rigide modelate ca puncte materiale, ale căror mișcări sunt interdependente datorită legăturilor existente între corpuri.

Legăturile fizice existente între corpurile unui sistem de puncte materiale sunt modelate matematic prin relații algebrice între parametrii de poziție ai corpurilor și, eventual, derivatele acestora.

Se consideră un sistem format din n puncte materiale având masele m_i ale căror coordonate în raport cu un reper fix $R(O,\bar{i},\bar{j},\bar{k})$ sunt x_i, y_i, z_i, $i=\overline{1,n}$. Legăturile la care pot fi supuse corpurile sistemului pot fi împărțite în șase categorii, după cum urmează.

1. Legături bilaterale și legături unilaterale.

Legătura bilaterală este tipul de legătură ce nu poate fi părăsită pe o direcție normală la curba sau suprafața de sprijin, adică pe o direcție perpendiculară pe viteza punctului. Legătura bilaterală este modelată matematic printr-o relație algebrică între parametrii de poziție ai punctelor exprimată printr-o egalitate de tipul:

$$f(x_1,y_1,z_1,\ldots x_n,y_n,z_n)=0. \qquad (11.333)$$

Legătura unilaterală poate fi părăsită pe direcție normală sub acțiunea unui sistem corespunzător de forțe. O legătură unilaterală este modelată matematic printr-o relație algebrică între parametrii de poziție ai punctelor exprimată printr-o inegalitate de tipul:

$$f(x_1,y_1,z_1,\ldots x_n,y_n,z_n)\geq 0. \qquad (11.334)$$

2. Legături geometrice și legături cinematice.

Legătura geometrică este legătura care impune restricții numai parametrilor de poziție nu și derivatelor acestora. Legătura geometrică este modelată matematic printr-o relație algebrică între parametrii de poziție ai punctelor, care, în cazul legăturii bilaterale, este de tipul:

$$f(x_1,y_1,z_1,\ldots x_n,y_n,z_n)=0. \qquad (11.335)$$

Dacă legătura este unilaterală, egalitatea devine inegalitate.

Legătura cinematică este legătura care impune restricții atât parametrilor de poziție cât și derivatelor acestora. Legătura cinematică este modelată matematic printr-o relație algebrică între parametrii de poziție ai punctelor și derivatele lor, care, în cazul legăturii bilaterale, este de tipul:

$$f(x_1,y_1,z_1,\dot{x}_1,\dot{y}_1,\dot{z}_1,\ldots x_n,y_n,z_n,\dot{x}_n,\dot{y}_n,\dot{z}_n)=0. \qquad (11.336)$$

Dacă legătura este unilaterală, egalitatea devine inegalitate.

3. Legături integrabile sau olonome și legături neintegrabile sau neolonome.

Această categorie de legături se referă la legăturile geometrice. Dacă o legătură cinematică poate fi transformată, printr-o operație de integrare, într-o legătură geometrică, atunci această legătură se spune că este integrabilă sau olonomă. În caz contrar legătura geometrică este neintegrabilă sau neolonomă.

4. Legături staționare sau scleronome și legături nestaționare sau reonome.

O legătură este staționară sau scleronomă dacă în relația algebrică care o modelează nu apare explicit timpul. De exemplu legăturile modelate de relațiile (11.333), (11.334) și (11.336) sunt staționare sau scleronome. O legătură este nestaționară sau reonomă dacă timpul t apare explicit în relațiile algebrice care o modelează matematic. De exemplu legătura modelată cu relația:

$$f(x_1, y_1, z_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots x_n, y_n, z_n, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t) = 0 \qquad (11.\ 337)$$

este o legătură geometrică, bilaterală și nestaționară (reonomă).

5. Legături ideale și legături reale.

Legătura ideală este acea legătură în al cărei model matematic nu se ține cont de frecări deoarece acestea se neglijează. Dacă frecările nu se pot neglija și apar în modelul matematic atunci legătura se numește reală.

6. Legături interioare și legături exterioare

Legăturile dintre corpurile sistemului se numesc legături interioare iar legăturile dintre corpurile sistemului și mediu se numesc legături exterioare.

O legătură face parte din mai multe categorii, de exemplu poate fi legătură interioară, geometrică, scleronomă, ideală și bilaterală.

Un sistem format din n puncte materiale are $3n$ parametri de poziție variabili în timp. Dacă între acești parametri există l relații de legătură olonome independente exprimate prin egalități, atunci rămân independenți numai $p = 3n - l$ parametri de poziție și se spine că sistemul are p grade de libertate. Se face precizarea că arcurile elastice nu micșorează numărul parametrilor de poziție independenți deci nu reduc numărul gradelor de libertate ale sistemului.

Forțele care acționează asupra corpurilor unui sistem se împart în două categorii și anume în forțe interioare și forțe exterioare. Forțele interioare includ numai forțele dintre corpurile sistemului ele fiind consecința interacțiunilor reciproce ale corpurilor ce compun sistemul. Forțele interioare satisfac principiul acțiunii și reacțiunii. Forțele exterioare includ forțele date și forțele de interacțiune ale corpurilor din sistem cu mediul exterior acestuia.

Se consideră două puncte arbitrare ale sistemului P_i și P_j ($i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, $i \neq j$) având vectorii de poziție $\bar{r}_i$ și respectiv $\bar{r}_j$ în raport cu polul O. Dacă se notează cu $\overline{F}_{ij}$ forța cu care acționează punctul P_j asupra punctului P_i și cu $\overline{F}_{ji}$ forța cu care acționează punctul P_i asupra punctului P_j, atunci, datorită principiului acțiunii și reacțiunii, au loc egalitățile:

$$\overline{F}_{ij} + \overline{F}_{ji} = 0, \qquad (11.338)$$

$$\bar{r}_i \times \overline{F}_{ij} + \bar{r}_j \times \overline{F}_{ji} = 0, \qquad (11.339)$$

ceea ce arată că forțele interioare sunt formate din perechi de vectori direct opuși care, după cum s-a arătat, au torsorul nul.

Asupra punctului P_i acționează o forță rezultantă interioară $\overline{F}_{\text{int}i}$ datorată numai interacțiunii cu celelalte puncte ale sistemului:

$$\overline{F}_{\text{int}_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{j=n} \overline{F}_{ij} \,. \qquad (11.340)$$

Momentul rezultant în polul O al forței rezultante interioare care acționează asupra punctului P_i este:

$$\overline{M}_{O_{\text{int}_i}} = \overline{M}_O(\overline{F}_{\text{int}_i}) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{j=n} \overline{r}_i \times \overline{F}_{ij} \,. \qquad (11.341)$$

Torsorul forțelor interioare pentru întregul sistem este nul și are componentele:

$$\overline{F}_{\text{int}} = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{F}_{\text{int}_i} = 0 \,; \qquad (11.342)$$

$$\overline{M}_{O\text{int}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_{O_{\text{int}_i}} = 0 \,. \qquad (11.343)$$

Mișcarea unui sistem de puncte materiale este cunoscută atunci când se poate determina mișcarea oricărui punct al sistemului.

Ecuațiile de mișcare ale punctelor P_i ($i = \overline{1,n}$) ale sistemului sunt:

$$m_i \overline{a}_i = \overline{F}_{ext\,i} + \overline{F}_{\text{int}\,i} \,,\ i = \overline{1,n} \,. \qquad (11.344)$$

Ca necunoscute ale acestui sistem de ecuații sunt coordonatele punctelor prezente prin derivatele lor de ordinul al doilea în raport cu timpul adică prin accelerațiile punctelor și reacțiunile legăturilor exterioare și interioare. Pentru a putea rezolva sistemul de ecuații (11.334) acesta trebuie completat cu ecuațiile de legătură și cu condițiile inițiale pentru momentul $t = 0$:

$$\overline{r}_i(0) = \overline{r}_i^{\,0} \,,\ \dot{\overline{r}}_i(0) = \overline{v}_i^{\,0} \,,\ i = \overline{1,n} \,. \qquad (11.345)$$

Prin proiectarea relațiilor vectoriale de mai sus pe axele unui reper unic sau, cel mai adesea, pe axele mai multor repere fixe alese convenabil și cu pozițiile reciproce bine precizate, se obțin relații scalare cu ajutorul cărora se rezolvă problema dinamicii sistemului.

11.13.1. Impulsul unui sistem de puncte materiale. Teorema impulsului pentru un sistem de puncte materiale

Se consideră un sistem format din n puncte materiale P_i având masele m_i ai căror vectori de poziție în raport cu un reper fix $R(O,\overline{i},\overline{j},\overline{k})$ sunt $\overline{r}_i$ și care au vitezele $\overline{v}_i = \dot{\overline{r}}_i$, $i = \overline{1,n}$.

Impulsul $\overline{H}$ al unui sistem de puncte materiale se definește ca fiind egal cu suma impulsurilor $\overline{H}_i$ ($i = \overline{1,n}$) ale punctelor sistemului:

$$\overline{H} = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{H}_i = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \overline{v}_i \ . \tag{11.346}$$

Centrul de masă G al sistemului de puncte materiale are vectorul de poziție

$$\overline{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \overline{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \overline{r}_i m_i}{M}, \tag{11.347}$$

unde M este masa întregului sistem egală cu suma maselor punctelor materiale.

Din relația (11.347) se obține egalitatea:

$$M\overline{r}_G = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{r}_i m_i \ , \tag{11.348}$$

care, prin derivare în raport cu timpul, conduce la:

$$M\overline{v}_G = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{v}_i m_i \ , \tag{11.349}$$

în care $\overline{v}_G$ notează viteza centrului de masă al sistemului de puncte materiale. Ținând cont de relația (11.346), se obține egalitatea:

$$\overline{H} = M\overline{v}_G \, , \tag{11.350}$$

care arată că impulsul unui sistem de puncte materiale este egal cu impulsul centrului său de masă, ca și cum în centrul de masă ar fi concentrată întreaga masă a sistemului de puncte materiale.

Teorema impulsului scrisă pentru fiecare punct al sistemului conduce la un sistem de n relații de forma:

$$\dot{\overline{H}}_i = \overline{F}_{ext_i} + \overline{F}_{\text{int}_i} \, , \ i = \overline{1,n} \tag{11.351}$$

Dacă se sumează aceste relații, atunci în membru stâng se obține derivata impulsului întregului sistem:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \dot{\overline{H}}_i = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d\overline{H}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=n} \overline{H}_i = \frac{d\overline{H}}{dt} = \dot{\overline{H}} \ , \tag{11.352}$$

iar în membrul drept, pe baza faptului că suma forțelor interioare pentru întregul sistem este zero, se obține vectorul rezultant al forțelor exterioare pentru întregul sistem:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\overline{F}_{ext_i} + \overline{F}_{\text{int}_i} \right) = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{F}_{ext_i} + \sum_{i=1}^{i=n} F_{\text{int}_i} = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{F}_{ext_i} = \overline{F}_{ext} \tag{11.353}$$

În final rezultă egalitatea:

$$\dot{\overline{H}} = \overline{F}_{ext} \, , \tag{11.354}$$

care exprimă teorema impulsului pentru un sistem de puncte materiale care se enunță astfel:

Derivata în raport cu timpul a impulsului unui sistem de puncte materiale este egală cu vectorul rezultant al forțelor exterioare care acționează asupra sistemului.

Pe de altă parte, derivând în raport cu timpul relația (11.350), se obține:

$$\dot{\overline{H}} = M\overline{a}_G . \qquad (11.355)$$

Pe baza egalităților (11.354) și (11.355), se poate scrie teorema mișcării centrului de masă:

$$M\overline{a}_G = \overline{F}_{ext} , \qquad (11.356)$$

care se enunță astfel:

Centrul de masă al unui sistem de puncte materiale se mișcă la fel ca un punct material a cărui masă este egală cu întreaga masă a sistemului și asupra căruia acționează o forță egală cu vectorul rezultant al forțelor exterioare.

La fel ca și în cazul unui singur punct material, și în cazul sistemelor de puncte materiale poate să aibă loc conservarea impulsului în cazul în care $\overline{F}_{ext} = 0$, adică atunci când:

$$\dot{\overline{H}} = 0 . \qquad (11.357)$$

Aceasta înseamnă că impulsul se conservă, adică are, pe tot parcursul mișcării, aceeași valoare $\overline{H}_0$ ca la momentul inițial $t = 0$:

$$\overline{H} = \overline{H}_0 = \overline{\text{constant}} , \qquad (11.358)$$

ceea ce se mai scrie:

$$M\overline{v}_G = M\overline{v}_G^0 = \overline{\text{constant}} . \qquad (11.359)$$

În acest caz se poate trage concluzia că viteza centrului de masă $\overline{v}_G$ este constantă și egală cu viteza $\overline{v}_G^0$ a acestuia din momentul inițial, ceea ce înseamnă că centrul de masă va avea o mișcare rectilinie și uniformă dacă $\overline{v}_G^0 \neq 0$ sau va rămâne în repaus dacă $\overline{v}_G^0 = 0$. Trebuie menționat faptul că poate să se producă conservarea impulsului numai pe una sau două direcții ale axelor sistemului de referință, caz în care, pe acele direcții, viteza centrului de masă al sistemului de puncte materiale are valoare constantă, diferită de zero sau egală cu zero.

11.13.2. Momentul cinetic al unui sistem de puncte materiale. Teorema momentului cinetic pentru un sistem de puncte materiale

Se consideră un sistem format din n puncte materiale P_i având masele m_i ai căror vectori de poziție în raport cu un reper fix $R(O,\overline{i},\overline{j},\overline{k})$ sunt $\overline{r}_i$ și care au vitezele $\overline{v}_i = \dot{\overline{r}}_i$, $i = \overline{1,n}$.

Momentul cinetic al sistemului de puncte materiale $\overline{K}_O$, calculat în raport cu polul *O*, se definește ca suma momentelor cinetice $\overline{K}_{O_i}$ $(i=\overline{1,n})$ ale tuturor punctelor sistemului calculate în raport cu același pol *O*:

$$\overline{K}_O = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{K}_{O_i} = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{r}_i \times m_i \overline{v}_i \,. \qquad (11.360)$$

Teorema momentului cinetic în raport cu polul *O* scrisă pentru fiecare punct al sistemului conduce la un sistem de *n* relații de forma:

$$\dot{\overline{K}}_{O_i} = \overline{M}_{O_{ext_i}} + \overline{M}_{O_{\text{int}_i}} \,,\; i=\overline{1,n} \,. \qquad (11.361)$$

Dacă se sumează aceste relații, atunci în membru stâng se obține derivata momentului cinetic al întregului sistem calculat în raport cu polul *O*:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \dot{\overline{K}}_{O_i} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d\overline{K}_{O_i}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=n} \overline{K}_{O_i} = \frac{d\overline{K}_O}{dt} = \dot{\overline{K}}_O \,, \qquad (11.362)$$

iar în membrul drept, pe baza faptului că suma momentelor forțelor interioare în raport cu polul *O* pentru întregul sistem este zero, se obține vectorul moment rezultant în raport cu polul *O* al forțelor exterioare pentru întregul sistem:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\overline{M}_{O_{ext_i}} + \overline{M}_{O_{\text{int}_i}}\right) = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{M}_{O_{ext_i}} + \sum_{i=1}^{i=n} \overline{M}_{O_{\text{int}_i}} = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{M}_{O_{ext_i}} = \overline{M}_{O_{ext}} \qquad (11.\ 363)$$

În final, din (11.362) și (11.363) se obține egalitatea

$$\dot{\overline{K}}_O = \overline{M}_{O_{ext}} \qquad (11.364)$$

ce exprimă teorema momentului cinetic în raport cu polul O pentru un sistem de puncte materiale care se enunță astfel:

Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic, calculat în raport cu un pol fix *O*, al unui sistem de puncte materiale este egală cu vectorul moment rezultant al forțelor exterioare calculat în raport cu același pol fix *O*.

La fel ca în cazul unui singur punct material și în cazul sistemelor de puncte materiale poate să aibă loc conservarea momentului cinetic în raport cu polul *O* în cazul în care $\overline{M}_{O_{ext}} = 0$, adică atunci când:

$$\dot{\overline{K}}_O = 0 \,. \qquad (11.365)$$

Aceasta înseamnă că momentului cinetic în raport cu polul *O* se conservă, adică are, pe tot parcursul mișcării, aceeași valoare $\overline{K}_O^0$ ca la momentul inițial $t=0$:

$$\overline{K}_O = \overline{K}_O^0 = \overline{\text{constant}} \,. \qquad (11.366)$$

Trebuie menționat faptul că poate să se producă conservarea momentului cinetic în raport cu polul O numai pe una sau două direcții ale axelor sistemului de referință.

11.13.3. Energia cinetică, lucrul mecanic și puterea pentru un sistem de puncte materiale. Teoremele energiei cinetice

Se consideră un sistem format din n puncte materiale P_i având masele m_i ai căror vectori de poziție în raport cu un reper fix $R(O,\bar{i},\bar{j},\bar{k})$ sunt $\bar{r}_i$ și care au vitezele $\bar{v}_i = \dot{\bar{r}}_i$, $i = \overline{1,n}$.

Energia cinetică a unui sistem de puncte materiale se definește ca fiind suma energiilor cinetice ale punctelor sistemului:

$$E = \sum_{i=1}^{i=n} E_i = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} m_i \bar{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \bar{v}_i^2 \qquad (11.367)$$

Lucrul mecanic elementar dL_i corespunzător punctului P_i pentru o deplasare elementară $d\bar{r}_i$ este efectuat atât de rezultanta forțelor exterioare $\bar{F}_{ext_i}$ cât și de rezultanta forțele interioare $\bar{F}_{\text{int}_i}$ care acționează asupra punctului :

$$dL_i = dL_{ext_i} + dL_{\text{int}_i} = \bar{F}_{ext_i} d\bar{r}_i + \bar{F}_{\text{int}_i} d\bar{r}_i = \left(\bar{F}_{ext_i} + \bar{F}_{\text{int}_i}\right) d\bar{r}_i, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (11.368)$$

Lucrul mecanic elementar pentru întrgul sistem este dat de suma lucrurilor mecanice elementare corespunzătoare fiecărui punct al sistemului:

$$dL = \sum_{i=1}^{i=n} dL_i = \sum_{i=1}^{i=n} \left(dL_{ext_i} + dL_{\text{int}_i}\right) = \sum_{i=1}^{i=n} dL_{ext_i} + \sum_{i=1}^{i=n} dL_{\text{int}_i} = dL_{ext} + dL_{\text{int}}. \qquad (11.369)$$

Lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare pentru întregul sistem este:

$$dL_{ext} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{F}_{ext\,i} \cdot d\bar{r}_i. \qquad (11.370)$$

Lucrul mecanic elementar al forțelor interioare pentru întregul sistem este:

$$dL_{\text{int}} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{F}_{\text{int}\,i} \cdot d\bar{r}_i. \qquad (11.371)$$

Lucrurile mecanice elementare (11.370) și (11.371) nu sunt, de regulă, diferențiale totale exacte.

Rezultanta forțelor interioare care acționează asupra punctului P_i este dată de relația (11.340), deci vectorul rezultant al forțelor interioare pentru întregul sistem este:

$$\overline{F}_{\text{int}} = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{F}_{\text{int}_i} = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{j=n} \overline{F}_{ij} \tag{11.372}$$

Lucrul mecanic elementar al forțelor interioare pentru întregul sistem se scrie acum:

$$dL_{\text{int}} = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{F}_{\text{int}_i} d\overline{r}_i = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{j=n} \overline{F}_{ij} \right) d\overline{r}_i . \tag{11.373}$$

Cu această expresie a lucrului mecanic elementar al forțelor interioare, lucrul mecanic elementar pentru întregul sistem devine:

$$dL = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{F}_{ext\,i} \cdot d\overline{r}_i + \sum_{i=1}^{i=n} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{j=n} \overline{F}_{ij} \right) d\overline{r}_i = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\overline{F}_{ext\,i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{j=n} \overline{F}_{ij} \right) d\overline{r}_i . \tag{11.374}$$

Pe de altă parte, asupra punctului P_j al sistemului acționează o forță rezultantă interioară $\overline{F}_{\text{int}\,j}$ datorată numai interacțiunii cu celelalte puncte ale sistemului de forma:

$$\overline{F}_{\text{int}_j} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{i=n} \overline{F}_{ji} . \tag{11.375 }$$

Lucrul mecanic elementar al forțelor interioare pentru întregul sistem se scrie, folosind relația de mai sus, astfel:

$$dL_{\text{int}} = \sum_{j=1}^{j=n} \overline{F}_{\text{int}_j} d\overline{r}_j = \sum_{j=1}^{j=n} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{i=n} \overline{F}_{ji} \right) d\overline{r}_j = -\sum_{j=1}^{j=n} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{i=n} \overline{F}_{ij} \right) d\overline{r}_j \tag{11.376}$$

unde s-a ținut cont de faptul că $\overline{F}_{ji} = -\overline{F}_{ij}$, egalitate care rezultă din principiul acțiunii și reacțiunii.

Relațiile (11.373) și (11.376) exprimă aceeași cantitate, prin urmare lucrul mecanic al forțelor interioare pentru întregul sistem reprezintă jumătate din suma lor:

$$dL_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{j=n} \overline{F}_{ij} \right) d\overline{r}_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{j=n} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{i=n} \overline{F}_{ij} \right) d\overline{r}_j \tag{11.377}$$

Relația de mai sus se mai scrie, pe baza interschimbabilității ordinii de sumare, sub forma:

$$dL_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{j=n} \overline{F}_{ij} d\left(\overline{r}_i - \overline{r}_j\right) \tag{11.378}$$

care reprezintă o altă formă a lucrului mecanic elementar al forțelor interioare. Cu notația:

$$d\left(\bar{r}_i - \bar{r}_j\right) = d\bar{r}_{ij}\,, \tag{11.379}$$

relația (11.378) devine:

$$dL_{\text{int}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{j=n}\bar{F}_{ij}d\bar{r}_{ij}\,. \tag{11.380}$$

O altă variantă de scriere a lucrului mecanic al forțelor interioare pentru întregul sistem se bazează pe faptul că atunci când $i < j$ se elimină automat jumătate dintre termenii sumei duble (11.380), ceea ce revine la o altă formă a expresiei lucrului mecanic al forțelor interioare pentru întregul sistem:

$$dL_{\text{int}} = \sum_{\substack{i=1\\ i<j}}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=n}\bar{F}_{ij}d\left(\bar{r}_i - \bar{r}_j\right) = \sum_{\substack{i=1\\ i<j}}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=n}\bar{F}_{ij}d\bar{r}_{ij} \tag{11.381}$$

În general lucrul mecanic al forțelor interioare pentru întregul sistem nu este nul.

Un caz particular important îl reprezintă situația în care sistemul este rigid. Deoarece pătratul distanței dintre două puncte P_i și P_j este $(\bar{r}_i - \bar{r}_j)^2$ și reprezintă o mărime constantă, rezultă că diferențiala acestei mărimi este zero:

$$d(\bar{r}_i - \bar{r}_j)^2 = 2(\bar{r}_i - \bar{r}_j)\cdot d(\bar{r}_i - \bar{r}_j) = 0\,. \tag{11.382}$$

Pe de altă parte, forța de interacțiune $\bar{F}_{ij}$ dintre puncte este coliniară cu vectorul $\bar{r}_i - \bar{r}_j$, adică poate fi scrisă $\bar{F}_{ij} = k(\bar{r}_i - \bar{r}_j)$, unde k este o constantă reală. Înlocuind această expresie a forței de interacțiune în relația (11.378) și pe baza relației (11.382) se obține egalitatea:

$$dL_{\text{int}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{j=n}k(\bar{r}_i - \bar{r}_j)d\left(\bar{r}_i - \bar{r}_j\right) = 0. \tag{11.383}$$

Relația de mai sus arată că atunci când sistemul este rigid, lucrul mecanic al forțelor interioare este nul.

Puterea forțelor care acționează asupra unui punct P_i al sistemului de puncte materiale este suma dintre puterea forțelor exterioare și puterea forțelor interioare care acționează asupra punctului:

$$P_i = P_{ext_i} + P_{\text{int}_i} = \bar{F}_{ext_i}\bar{v}_i + \bar{F}_{\text{int}_i}\bar{v}_i = (\bar{F}_{ext_i} + \bar{F}_{\text{int}_i})\bar{v}_i\,,\ i = \overline{1,n} \tag{11.384}$$

Puterea forțelor care acționează asupra punctelor sistemului este suma dintre puterea forțelor care acționează asupra fiecărui punct al acestuia:

$$P=\sum_{i=1}^{i=n}P_i=\sum_{i=1}^{i=n}P_{ext_i}+\sum_{i=1}^{i=n}P_{\text{int}_i}=P_{ext}+P_{\text{int}}=\sum_{i=1}^{i=n}\overline{F}_{ext_i}\overline{v}_i+\sum_{i=1}^{i=n}\overline{F}_{\text{int}_i}\overline{v}_i=\sum_{i=1}^{i=n}(\overline{F}_{ext_i}+\overline{F}_{\text{int}_i})\overline{v}_i \quad (11.385)$$

Relația anterioară mai arată că puterea forțelor care acționează asupra sistemului de puncte materiale este egală cu suma dintre puterea forțelor exterioare care acționează asupra punctelor sistemului

$$P_{ext}=\sum_{i=1}^{i=n}P_{ext_i}=\sum_{i=1}^{i=n}\overline{F}_{ext_i}\overline{v}_i \quad (11.386)$$

și puterea forțelor interioare care acționează asupra punctelor sistemului

$$P_{\text{int}}=\sum_{i=1}^{i=n}P_{\text{int}_i}=\sum_{i=1}^{i=n}\overline{F}_{\text{int}_i}\overline{v}_i\ . \quad (11.387)$$

Teorema energiei cinetice pentru un punct material P_i al sistemului este:

$$\dot{E}_i=P_{ext_i}+P_{\text{int}_i}\ ,\ i=\overline{1,n}\ . \quad (11.388)$$

Sumând relațiile de mai sus scrise pentru toate punctele sistemului, se obține:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\dot{E}_i=\sum_{i=1}^{i=n}(P_{ext_i}+P_{\text{int}_i})=\sum_{i=1}^{i=n}P_{ext_i}+\sum_{i=1}^{i=n}P_{\text{int}_i}=P_{ext}+P_{\text{int}} \quad (11.389)$$

Pe de altă parte, pe baza faptului că se poate inversa ordinea dintre operația de derivare și cea de sumare, primul termen din relația anterioară devine:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\dot{E}_i=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{dE_i}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{i=n}E_i\right)=\frac{d}{dt}E=\dot{E}\ . \quad (11.390)$$

Relațiile (11.389) și (11.390) conduc la formularea teoremei energiei cinetice pentru un sistem de puncte materiale care afirmă că derivata energiei cinetice a sistemului este egală cu suma dintre puterea forțelor exterioare și puterea forțelor interioare care acționează asupra punctelor sistemului:

$$\dot{E}=P_{ext}+P_{\text{int}}\ . \quad (11.391)$$

Relația anterioară se poate scrie:

$$\frac{dE}{dt}=P_{ext}+P_{\text{int}}\ , \quad (11.392)$$

care, pe baza relațiilor (11.368), (11.369) și (11.385), conduce la expresia:

$$dE=(P_{ext}+P_{\text{int}})dt=\left(\sum_{i=1}^{i=n}(\overline{F}_{ext_i}+\overline{F}_{\text{int}_i})\overline{v}_i\right)dt=\sum_{i=1}^{i=n}(\overline{F}_{ext_i}+\overline{F}_{\text{int}_i})d\overline{r}_i=\sum_{i=1}^{i=n}dL_i=dL\ . \quad (11.393)$$

Relația de mai sus exprimă o altă formă a teoremei energiei cinetice pentru un sistem de puncte materiale care afirmă că diferențiala energiei cinetice a sistemului este egală cu lucrul mecanic elementar al tuturor forțelor exterioare și interioare care acționează asupra punctelor sistemului:

$$dE = dL_{ext} + dL_{\text{int}} = dL \qquad (11.394)$$

Dacă se integrează relația (11.394) se obține

$$E - E_0 = L \qquad (11.395)$$

ce reprezintă o a treia formă a teoremei energiei cinetice care afirmă că variația energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale este egală cu lucrul mecanic efectuat de forțele exterioare și interioare ce acționează asupra punctelor sistemului.

În cazul în care forțele exterioare sunt conservative, adică există o funcție scalară U_{ext} care depinde numai de poziție astfel încât lucrul mecanic al forțelor exterioare este o diferențială totală exactă, atunci are loc egalitatea:

$$dL_{ext} = dU_{ext}\ . \qquad (11.396)$$

Dacă și forțele interioare sunt conservative, adică există o funcție scalară U_{int} care depinde numai de poziție astfel încât lucrul mecanic al forțelor interioare este și el o diferențială totală exactă, adică are loc relația:

$$dL_{\text{int}} = dU_{\text{int}}, \qquad (11.397)$$

atunci teorema energiei cinetice (11.394) se scrie:

$$dE = dU_{\text{int}} + dU_{ext}, \qquad (11.398)$$

de unde rezultă egalitatea:

$$d(E - U_{\text{int}} - U_{ext}) = 0\ . \qquad (11.399)$$

Pe de altă parte, dacă energia potențială a sistemului, notată cu V, este definită ca fiind dată de expresia:

$$V = -U_{\text{int}} - U_{ext}, \qquad (11.400)$$

atunci din relațiile (11.399) și (11.400) rezultă teorema conservării energie mecanice în cazul unui sistem de puncte materiale care afirmă că atunci când forțele exterioare și cele interioare care acționează asupra punctelor sistemului sunt conservative, atunci energia mecanică totală a întregului sistem este constantă:

$$E + V = \text{constant}\ . \qquad (11.401)$$