Capitolul III

CINEMATICA MIŞCĂRII RELATIVE A PUNCTULUI ŞI A RIGIDULUI

3.1. Aspecte generale privind cinematica mişcării relative a punctului

Se consideră un punct M care se mişcă în raport cu un rigid (S_1) care, la rândul său, este mobil în raport cu un rigid (S_0) considerat fix (fig. 3.1). De rigidul (S_0) se consideră solidar un reper fix $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, iar de solidul (S_1) se consideră solidar un reper $R''(W,\vec{i}'',\vec{j}'',\vec{k}'')$, reper care se mişcă odată cu solidul (S_1). Punctul M este în mişcare atât în raport cu reperul mobil R'' cât şi în raport cu reperul fix R, situaţie în care se spune că punctul are o mişcare compusă.

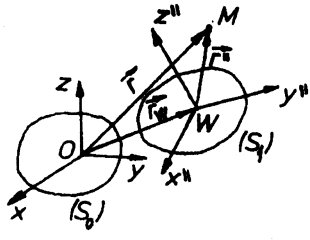

Fig. 3.1

În această problemă apar trei mişcări ce vor fi precizate în continuare.

1. Mişcarea relativă este mişcarea punctului M în raport cu reperul R'' şi este sesizată de un observator solidar cu acest reper. Traiectoria, viteza şi acceleraţia punctului M în raport cu reperul R'' se numesc traiectorie relativă, viteză relativă şi respectiv acceleraţie relativă.

2. Mişcarea de transport este mişcarea în raport cu reperul fix a

punctului M atunci când acesta ar fi legat solidar cu reperul R'' în poziţia pe care o are la acel moment, adică ar înceta instantaneu mişcarea relativă. Se poate spune că, în fiecare moment, punctul M coincide cu câte un punct solidar cu reperul mobil, viteza şi acceleraţia acestui din urmă punct fiind tocmai viteza de transport şi acceleraţia de transport.

3. Mişcarea absolută este mişcarea punctului M în raport cu reperul fix. Traiectoria, viteza şi acceleraţia punctului M în raport cu acest reper se numesc traiectorie absolută, viteză absolută şi acceleraţie absolută.

Un exemplu de mişcare relativă a punctului este deplasarea căruciorului macaralei (considerat punct material) pe braţul acesteia în timp ce macaraua se mişcă. Mişcarea căruciorului în raport cu braţul macaralei este mişcarea relativă, mişcarea punctului aparţinând braţului macaralei în care se găseşte căruciorul la acel moment este mişcarea de transport, iar mişcarea căruciorului faţă de un observator fix de pe sol este mişcarea absolută.

Un alt exemplu este mişcarea, în lungul podului vătalei, a suveicii războiului de ţesut în timp ce vătala se roteşte în jurul unei axe fixate de batiu.

3.2 Studiul problemei de cinematica mişcării relative a punctului

Fie un punct M care se mişcă faţă de reperul R'' legat solidar de solidul (S_1) care, la rândul său, este în mişcare faţă de reperul fix R.

Se consideră cunoscute:

a. ecuaţiile mişcării relative

$$x'' = x''(t),\ y'' = y''(t),\ z'' = z''(t), \tag{3.1}$$

care sunt coordonatele, variabile în timp, ale punctului M faţă de reperul R'';

b. ecuaţiile mişcării de transport

$$x_W = x_W(t), \qquad y_W = y_W(t), \qquad z_W = z_W(t),$$
$$\psi_t = \psi_t(t), \qquad \varphi_t = \varphi_t(t), \qquad \theta_t = \theta_t(t), \tag{3.2}$$

care sunt parametrii de poziţie ai reperului R'' în raport cu reperul fix, în cazul când solidul (S_1) execută o mişcare generală. Dacă mişcarea lui (S_1) este una particulară, parametrii de poziţie capătă forma particulară corespunzătoare mişcării respective.

Folosind aceste date, se va determina traiectoria, viteza şi acceleraţia absolută a punctului.

Pe baza ecuaţiilor mişcării relative (3.1), se poate determina traiectoria relativă prin eliminarea parametrului t şi se poate scrie ecuaţia vectorială a acesteia:

$$\vec{r}'' = x''\vec{i}'' + y''\vec{j}'' + z''\vec{k}'' \tag{3.3}$$

Viteza relativă se determină prin derivarea relaţiei (3.3) în care versorii $\vec{i}''$, $\vec{j}''$, $\vec{k}''$ sunt consideraţi constanţi, operaţie denumită derivare relativă, rezultând:

$$\vec{v}_r = \dot{x}''\vec{i}'' + \dot{y}''\vec{j}'' + \dot{z}''\vec{k}'' = \frac{d(\vec{r}'')_r}{dt}, \tag{3.4}$$

unde $\frac{d(\vec{r}'')_r}{dt}$ notează derivata relativă a vectorului $\vec{r}''$.

Analog, se calculează acceleraţia relativă, adică efectuând derivata relativă a vectorului $\vec{v}_r$, obţinându-se

$$\vec{a}_r = \ddot{x}''\vec{i}'' + \ddot{y}''\vec{j}'' + \ddot{z}''\vec{k}'' = \frac{d}{dt}(\vec{v}_r)_r. \tag{3.5}$$

În ceea ce priveşte mişcarea de transport, ecuaţiile acesteia date de (3.2), permit determinarea vitezei de transport şi acceleraţiei de transport.

Viteza de transport, $\vec{v}_t$, este viteza punctului considerat solidar cu

solidul (S_1), deci se poate folosi formula generală de calcul a vitezei unui punct al unui rigid (2.25) scrisă sub forma:

$$\vec{v}_t = \vec{v}_W + \vec{\omega}_t \times \vec{r}'', \tag{3.6}$$

în care,

$$\vec{v}_W = \dot{\vec{r}}_W = \dot{x}_W \vec{i} + \dot{y}_W \vec{j} + \dot{z}_W \vec{k}, \tag{3.7}$$

$$\vec{\omega}_t = \dot{\psi}_t \vec{k} + \dot{\varphi}_t \vec{k}'' + \dot{\theta}_t \vec{n}_t, \tag{3.8}$$

Accelerația de transport, $\vec{a}_t$, din motivul arătat mai sus, se poate scrie pe baza formulei (2.29), sub forma:

$$\vec{a}_t = \vec{a}_W + \vec{\varepsilon}_t \times \vec{r}'' + \vec{\omega}_t \times (\vec{\omega}_t \times \vec{r}''), \tag{3.9}$$

în care:

$$\vec{a}_W = \dot{\vec{v}}_W = \ddot{x}_W \vec{i} + +\ddot{y}_W \vec{j} + \ddot{z}_W \vec{k}, \tag{3.10}$$

$$\vec{\varepsilon}_t = \dot{\vec{\omega}}_t. \tag{3.11}$$

Rezultatele de mai sus permit acum determinarea traiectoriei absolute, vitezei absolute şi accelerației absolute a punctului M.

Ecuația vectorială a traiectoriei absolute a punctului M se obține pe baza fig. 3.1 din care rezultă

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OW} + \overrightarrow{WM}, \tag{3.12}$$

adică

$$\vec{r} = \vec{r}_W + \vec{r}'', \tag{3.13}$$

relație ce reprezintă tocmai ecuația vectorială a traiectoriei absolute a punctului M.

Din definiția vitezei unui punct, rezultă că viteza absolută $\vec{v}_a$ a punctului M este

$$\vec{v}_a = \dot{\vec{r}}. \tag{3.14}$$

de unde, pe baza relației (3.13), rezultă:

$$\vec{v}_a = \dot{\vec{r}}_W + \dot{\vec{r}}''. \tag{3.15}$$

Calcularea celui de-al doilea termen din relaţia anterioară se face folosind formulele lui Poisson:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}'' &= \dot{x}''\vec{i}'' + \dot{y}''\vec{j}'' + \dot{z}''\vec{k}'' + x''(\vec{\omega}_t \times \vec{i}'') + y''(\vec{\omega}_t \times \vec{j}'') + z''(\vec{\omega}_t \times \vec{k}'') = \\ &= \vec{v}_r + \vec{\omega}_t \times \vec{r}''.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Viteza absolută capătă forma:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_W + \vec{v}_r + \vec{\omega}_t \times \vec{r}''. \tag{3.17}$$

Folosind relaţia (3.6) se obţine

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t, \tag{3.18}$$

care arată că viteza absolută este suma dintre viteza relativă şi viteza de transport a punctului.

Din definiţia accelerației unui punct rezultă că accelerația absolută $\vec{a}_a$ a punctului M este

$$\vec{a}_a = \dot{\vec{v}}_a, \tag{3.19}$$

astfel că, pe baza relației (3.18), se obţine

$$\vec{a}_a = \dot{\vec{v}}_r + \dot{\vec{v}}_t. \tag{3.20}$$

Derivata vitezei relative este

$$\begin{aligned}\dot{\vec{v}}_r &= \frac{d}{dt}(\dot{x}''\vec{i}'' + \dot{y}''\vec{j}'' + \dot{z}''\vec{k}'') = \ddot{x}''\vec{i}'' + \ddot{y}''\vec{j}'' + \ddot{z}''\vec{k}'' + \\ &+ \dot{x}''(\vec{\omega}_t \times \vec{i}'') + \dot{y}''(\vec{\omega}_t \times \vec{j}'') + \dot{z}''(\vec{\omega}_t \times \vec{j}'')\vec{k}'',\end{aligned} \tag{3.21}$$

în care s-a ţinut cont de formulele lui Poisson.

Cu relaţia (3.5) şi asociind derivatele $\dot{x}''$, $\dot{y}''$, $\dot{z}''$ versorilor $\vec{i}''$, $\vec{j}''$, $\vec{k}''$ din paranteze, se obţine în final

$$\dot{\vec{v}}_r = \vec{a}_r + \vec{\omega}_t \times \vec{v}_r. \tag{3.22}$$

Derivata vitezei de transport se scrie, folosind relaţia (3.6), de forma

$$\dot{\vec{v}}_t = \dot{\vec{v}}_W + \dot{\vec{\omega}}_t \times \vec{r}'' + \vec{\omega}_t \times \dot{\vec{r}}'', \tag{3.23}$$

formulă care, ţinând cont de (3,10), (3.11) şi (3.16) devine:

$$\dot{\vec{v}}_t = \vec{a}_W + \vec{\varepsilon}_t \times \vec{r}'' + \vec{\omega}_t \times (\vec{v}_r + \vec{\omega}_t \times \vec{r}'') . \qquad (3.24)$$

Înlocuind (3.22) şi (3.24) în (3.20), accelerația absolută capătă forma

$$\vec{a}_a = \vec{a}_W + \vec{\varepsilon}_t \times \vec{r}'' + \vec{\omega}_t \times (\vec{\omega}_t \times \vec{r}'') + \vec{a}_r + 2(\vec{\omega}_t \times \vec{v}_r) , \qquad (3.25)$$

sau, folosind (3.9) şi notând ultimul termen cu

$$\vec{a}_c = 2(\vec{\omega}_t \times \vec{v}_r) , \qquad (3.26)$$

rezultă

$$\vec{a}_a = \vec{a}_t + \vec{a}_r + \vec{a}_c . \qquad (3.27)$$

Termenul $\vec{a}_c$ se numeşte accelerație complementară sau Coriollis iar relația (3.27) mai este cunoscută sub denumirea de teorema lui Coriollis.

Prin urmare, accelerația absolută este suma vectorială a accelerației de transport, accelerației relative şi accelerației Coriollis.

3.3 Cinematica mişcării relative a rigidului

Se consideră un solid (S) de care este solidar un reper $R'(O, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ şi care este în mişcare față de un solid (S_1) de care este solidar un reper $R''(W, \vec{i}'', \vec{j}'', \vec{k}'')$. Solidul (S_1) se mişcă la rândul său față de un reper fix $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

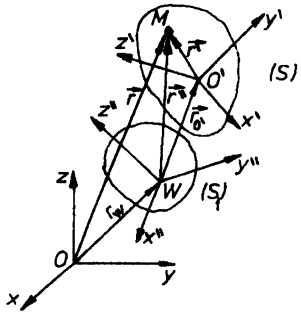

Fig. 3.2

Se doreşte determinarea traiectoriei, vitezei şi accelerației absolute a unui punct arbitrar M al solidului (S). Se consideră cunoscute coordonatele x', y' şi z' ale punctului M în raport cu reperul R' care sunt constante, ecuațiile mişcării relative ale solidului (S) față de reperul R'' care

au forma (2.5) şi ecuaţiile mişcării de transport care sunt (3.2).

Problema de faţă se reduce la o problemă de cinematica mişcării relative a punctului dacă se determină ecuaţiile mişcării relative a punctului M date de relaţiile (3.1), adică dacă se determină coordonatele x'', y'' şi z'' ale punctului M în raport cu reperul R''. În continuare se va prezenta rezolvarea acestei probleme.

În condiţiile în care se cunosc ecuaţiile mişcării relative, care sunt de forma (2.5):

$$\begin{aligned} &x''_{O'} = x''_{O'}(t), \qquad y''_{O'} = y''_{O'}(t), \qquad z''_{O'} = z''_{O'}(t), \\ &\psi_r = \psi_r(t), \qquad \varphi_r = \varphi_r(t), \qquad \theta_r = \theta_r(t), \end{aligned} \tag{3.28}$$

rezultă că se pot determina cosinusurile directoare în funcţie de unghiurile lui Euler cu relaţiile (2.186) sau matricea cosinusurilor directoare cu relaţia (2.187). Se poate scrie spoi tabla de înmulţire a versorilor pentru mişcarea relativă:

$$\begin{array}{c|ccc} & \vec{i}'' & \vec{j}'' & \vec{k}'' \\ \hline \vec{i}' & \alpha^r_{11} & \alpha^r_{12} & \alpha^r_{13} \\ \vec{j}' & \alpha^r_{21} & \alpha^r_{22} & \alpha^r_{23} \\ \vec{k}' & \alpha^r_{31} & \alpha^r_{32} & \alpha^r_{33} \end{array} \tag{3.29}$$

Din fig. 3.2, rezultă relaţia vectorială:

$$\vec{r}'' = \vec{r}''_{O'} + \vec{r}', \tag{3.30}$$

care se scrie analitic

$$x''\vec{i}'' + y''\vec{j}'' + z''\vec{k}'' = x''_{O'}\vec{i}'' + y''_{O'}\vec{j}'' + z''_{O'}\vec{k}'' + x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}', \tag{3.31}$$

de unde, înmulţind scalar cu $\vec{i}''$, $\vec{j}''$ şi $\vec{k}''$ şi ţinând cont de (3.29), se obţin ecuaţiile mişcării relative:

$$\begin{aligned} x'' &= x''_{O'} + x'\alpha^r_{11} + y'\alpha^r_{21} + z'\alpha^r_{31}, \\ y'' &= y''_{O'} + x'\alpha^r_{12} + y'\alpha^r_{22} + z'\alpha^r_{32}, \\ z'' &= z''_{O'} + x'\alpha^r_{13} + y'\alpha^r_{23} + z'\alpha^r_{33}. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Acum se pot aplica rezultatele din §3.2., viteza relativă fiind

$$\vec{v}_r = \dot{x}''\vec{i}'' + \dot{y}''\vec{j}'' + \dot{z}''\vec{k}'', \tag{3.33}$$

iar accelerația relativă

$$\vec{a}_r = \ddot{x}''\vec{i}'' + \ddot{y}''\vec{j}'' + \ddot{z}''\vec{k}''. \tag{3.34}$$

Viteza absolută se calculează cu (3.18) în care viteza de transport este dată de (3.6).

Accelerația absolută se calculează cu (3.27) în care accelerația de transport este dată de (3.9) iar accelerația Coriollis de (3.26).

Observație

Viteza relativă și accelerația relativă se pot calcula și cu formule similare cu (2.25) și respectiv cu (2.29):

$$\vec{v}_r = \vec{v}_{O'_r} + \vec{\omega}_r \times \vec{r}' \tag{3.35}$$

$$\vec{a}_r = \vec{a}_{O'_r} + \vec{\varepsilon}_r \times \vec{r}' + \vec{\omega}_r \times (\vec{\omega}_r \times \vec{r}') \tag{3.36}$$

3.3.1. Compunerea vitezelor în cinematica mișcării relative a rigidului

Se pune problema determinării parametrilor cinematici de ordinul întâi ai mișcării absolute într-un pol A aparținând rigidului (S) și a determinării vitezei absolute a unui punct arbitrar M al rigidului (S) atunci când se consideră cunoscuți parametrii cinematici de ordinul întâi ai mișcării relative

$$\vec{v}_{O'_r} = \vec{v}_1; \ \vec{\omega}_r = \vec{\omega}_1 \tag{3.37}$$

și parametrii cinematici de ordinul întâi ai mișcării de transport:

$$\vec{v}_W = \vec{v}_2; \ \vec{\omega}_t = \vec{\omega}_2. \tag{3.38}$$

Viteza absolută $\vec{v}_a$ a punctului M se calculează cu relația

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t = \vec{v}_1 + \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{O'M} + \vec{v}_2 + \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{WM} \tag{3.39}$$

unde s-a ținut cont de relațiile (3.6) și (3.35).

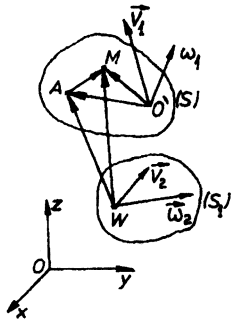

Fig. 3.3

Dacă se notează cu $\vec{v}_{Aa}$ şi $\vec{\omega}_a$ parametrii cinematici de ordinul întâi ai mişcării absolute în polul A, atunci viteza absolută a punctului M se scrie

$$\vec{v}_a = \vec{v}_{Aa} + \vec{\omega}_a \times \overrightarrow{AM} \qquad (3.40)$$

Pe de altă parte, viteza absolută a punctului A se poate calcula cu formula:

$$\vec{v}_{Aa} = \vec{v}_{Ar} + \vec{v}_{At} = \vec{v}_1 + \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{O'A} + \vec{v}_2 + \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{WA}, \qquad (3.41)$$

care, înlocuită în (3.40), conduce la:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{O'A} + \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{WA} + \vec{\omega}_a \times \overrightarrow{AM}. \qquad (3.42)$$

Din fig. 3.3. se deduc relaţiile vectoriale:

$$\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'A} + \overrightarrow{AM} \text{ şi } \overrightarrow{WM} = \overrightarrow{WA} + \overrightarrow{AM}, \qquad (3.43)$$

care permit scrierea relaţiei (3.39) sub forma

$$\vec{v}_a = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{O'A} + \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{AM} + \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{WA} + \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{AM}. \qquad (3.44)$$

Egalând relaţiile (3.42) cu (3.44), care reprezintă viteza absolută a aceluiaşi punct M, se obţine

$$(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \overrightarrow{AM} = \vec{\omega}_a \times \overrightarrow{AM}, \qquad (3.45)$$

relaţie din care rezultă că

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_t. \qquad (3.46)$$

În concluzie, pe baza datelor presupuse cunoscute iniţial (3.37) şi (3.38), s-au obţinut: viteza absolută a polului $A \in (S)$

$$\vec{v}_{Aa} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{O'A} + \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{WA}; \qquad (3.47)$$

viteza unghiulară absolută

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2; \qquad (3.48)$$

şi viteza absolută a unui punct arbitrar $M \in (S)$:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_{Aa} + \vec{\omega}_a \times \overrightarrow{AM}. \qquad (3.49)$$

Utilizând rezultatele anterioare, se vor studia patru cazuri de compuneri de mişcări particulare.

1. Compunerea a două translaţii

În acest caz particular, în care rigidele (S) şi (S_1) execută o mişcare relativă de translaţie şi respectiv o mişcare de transport de translaţie, se presupun cunoscuţi parametrii cinematici:

$$\vec{v}_{O'_r} = \vec{v}_1 \neq 0,\ \vec{\omega}_r = \vec{\omega}_1 = 0,\ \vec{v}_W = \vec{v}_2 \neq 0,\ \vec{\omega}_t = \vec{\omega}_2 = 0. \qquad (3.50)$$

Considerând un pol arbitrar A aparţinând solidului (S), relaţiile (3.47), (3.48) şi (3.49) se scriu:

$$\vec{v}_{Aa} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2,\ \vec{\omega}_a = 0,\ \vec{v}_a = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_{Aa}. \qquad (3.51)$$

Faptul că viteza unghiulară absolută este nulă, arată că mişcarea absolută a rigidului (S) este o translaţie în cadrul căreia toate punctele acestuia au, la momentul t, aceeaşi viteză absolută $\vec{v}_a = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

Ca exemplu se poate da mişcarea căruciorului pe podul rulant în mişcare.

2. Compunerea a două rotaţii concurente

Se consideră că solidul (S) execută o mişcare relativă de rotaţie în jurul axei (Δ_1) iar solidul (S_1) execută o mişcare de transport de rotaţie în jurul unei axe fixe (Δ_2) (fig. 3.4). Axa $O'z'$ se alege coincizând cu axa (Δ_1) iar axele Oz şi Wz'' coincizând cu axa (Δ_2). Punctul A se alege punctul de intersecţie al axelor (Δ_1) şi (Δ_2).

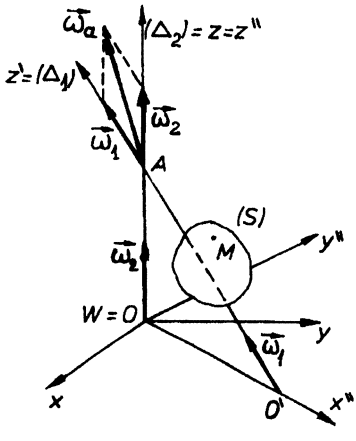

Fig. 3.4

Parametrii cinematici cunoscuţi sunt

$$\vec{v}_{O'_r} = \vec{v}_1 = 0,\ \vec{\omega}_r = \vec{\omega}_1 \neq 0,\ \vec{v}_W = \vec{v}_2 = 0,\ \vec{\omega}_t = \vec{\omega}_2 \neq 0 \qquad (3.52)$$

Relaţiile (3.47), (3.48) şi (3.49) se scriu:

$$\vec{v}_{Aa} = \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{O'A} + \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{WA} = 0,\ \vec{\omega}_a = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2,\ \vec{v}_a = \vec{\omega}_a \times \overrightarrow{AM}. \qquad (3.53)$$

Mişcarea absolută a solidului (S) este o rotaţie instantanee cu viteza unghiulară instantanee $\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \neq 0$ cu suportul trecând prin punctul de concurenţă A al axelor (Δ_1) şi (Δ_2).

Ca exemplu se poate da mişcarea roţii satelit a mecanismului diferenţial cu roţi conice care va fi prezentat în capitolul următor.

3. Compunerea a două rotaţii paralele, egale ca mărime şi de sensuri opuse

Se consideră că solidul (S) execută o mişcare de rotaţie în jurul unei axe (Δ_1) iar solidul (S_1) o mişcare de rotaţie în jurul unei axe (Δ_2), cele două mişcări având viteze unghiulare egale în modul dar de sensuri opuse (fig. 3.5). Axa $O'z'$ coincide cu axa (Δ_1) direcţia lor comună fiind paralelă cu axa Oz în tot timpul mişcării. Axele Oz, Wz'' şi (Δ_2) coincid (fig. 3.5).

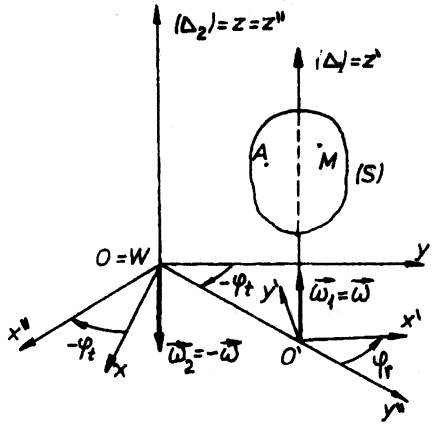

Fig. 3.5

Parametrii cinematici cunoscuţi sunt

$$\vec{v}_{O'_r} = 0,\ \vec{\omega}_r = \vec{\omega}_1 = \vec{\omega},\ \vec{v}_W = \vec{v}_2 = 0,\ \vec{\omega}_t = \vec{\omega}_2 = -\vec{\omega}. \qquad (3.54)$$

Relaţiile (3.47), (3.48) şi (3.49) se scriu

$$\vec{v}_{Aa} = \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{O'A} + \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{WA} = \vec{\omega} \times (\overrightarrow{O'A} - \overrightarrow{WA}) = \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'O}, \qquad (3.55)$$

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \vec{\omega} - \vec{\omega} = 0, \qquad (3.56)$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_{Aa}. \qquad (3.57)$$

Deoarece $\vec{\omega}_a = 0$, mişcarea absolută a rigidului (S) este o translaţie, iar viteza unui punct arbitrar M este egală cu viteza absolută a punctului A.

Ca exemplu se poate da mişcarea scaunului unei roţi verticale din parcul de distracţii.

4. Compunerea a două rotaţii paralele oarecare

Se consideră situaţia $\vec{\omega}_1 \parallel \vec{\omega}_2$, $\vec{\omega}_2 \neq -\vec{\omega}_1$, (fig. 3.6). Parametrii cinematici cunoscuţi sunt:

$$\vec{v}_{O'_r} = \vec{v}_1 = 0,\ \vec{\omega}_r = \vec{\omega}_1 \neq 0,$$
$$\vec{v}_W = \vec{v}_2 = 0,\ \vec{\omega}_t = \vec{\omega}_2 \neq 0. \qquad (3.58)$$

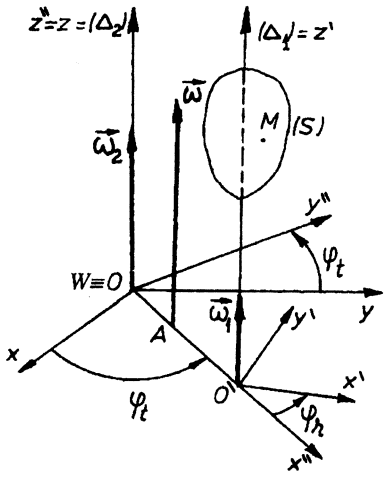

Fig. 3.6

Punctul A se alege în centrul sistemului de doi vectori paraleli $\vec{\omega}_1$ şi $\vec{\omega}_2$. Relaţiile (3.47), (3.48) şi (3.49) se scriu

$$\vec{v}_{Aa} = \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{O'A} + \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{WA}, \qquad (3.59)$$

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}, \qquad (3.60)$$

$$\vec{v}_a = \vec{\omega}_a \times \overrightarrow{AM}. \qquad (3.61)$$

Sistemul de vectori paraleli $\vec{\omega}_1$ şi $\vec{\omega}_2$ este echivalent cu o rezultantă unică $\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \neq 0$, aplicată în punctul A şi având direcţia comună a vectorilor, cu proprietatea că momentul rezultant al sistemului $\vec{\mathcal{M}}_A$ este egal cu momentul vectorului rezultant $\vec{M}_A(\vec{\omega})$. Cum

$$\vec{v}_{Aa} = \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{O'A} + \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{WA} = \vec{M}_A(\vec{\omega}_1) + \vec{M}_A(\vec{\omega}_2) = \vec{\mathcal{M}}_A, \qquad (3.62)$$

relaţie care arată că viteza absolută a punctului A este tocmai momentul rezultant, iar

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{M}_A(\vec{\omega}) = 0 \qquad (3.63)$$

deoarece vectorul rezultant $\vec{\omega}$ este aplicat chiar în punctul A, rezultă din (3.62) că

$$\vec{v}_{Aa} = 0 \qquad (3.64)$$

Acest rezultat arată că mişcarea absolută este o rotaţie instantanee în jurul unei axe instantanee de rotaţie care are direcţia fixă a celor două viteze unghiulare şi care trece prin centrul sistemului de vectori paraleli format din vectorii $\vec{\omega}_1$ şi $\vec{\omega}_2$.

Ca exemplu pentru o astfel de compunere de rotaţii este mişcarea roţii satelit a unui mecanism diferenţial cu roţi cilindrice, care va fi prezentat în capitolul următor.

3.4. Aplicaţii

1. O placă dreptunghiulară de dimensiuni AB = 2b şi BC = 2a se mişcă într-un ghidaj rectiliniu după legea $x = A\sin(kt)$ (fig. 3.7). Pe latura BC se deplasează un punct M după legea $s = a\sin(kt)$. Să se determine traiectoria absolută, viteza absolută şi acceleraţia absolută a punctului M.

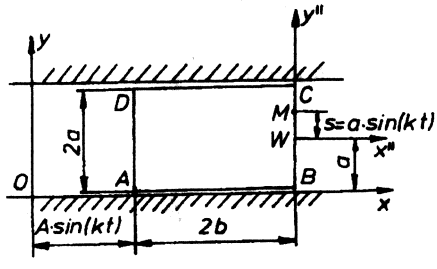

Fig. 3.7

Placa dreptunghiulară execută mişcarea de transport care este o mişcare plană de translaţie rectilinie oscilatorie armonică. Reperul $x''Wy''$, solidar cu placa, se alege cu axele paralele cu ale reperului fix xOy şi cu polul W în centrul de oscilaţie al mişcării relative a punctului M, care este tot o mişcare rectilinie oscilatorie armo-

nică.

Parametrii de poziţie ai reperului $R''(O,\vec{i}'',\vec{j}'')$ sunt:

$$x_W = A\sin(kt) + 2b,\ y_W = a.$$

Ecuaţiile mişcării relative sunt:

$$x'' = 0,\ y'' = a\sin(kt)$$

Traiectoria absolută a punctului M se obţine pe baza formulei (3.13) şi este:

$$x\vec{i} + y\vec{j} = [A\sin(kt) + 2b]\vec{i} + a\vec{j} + a\sin(kt)\vec{j}''.$$

Deoarece mişcarea de transport este o translaţie, din modul de alegere a celor două repere, rezultă că versorii axelor reperului fix sunt identici cu versorii axelor reperului mobil $(\vec{i} = \vec{i}'',\ \vec{j} = \vec{j}'')$. Ecuaţiile parametrice ale traiectoriei absolute vor fi de forma:

$$x = A\sin(kt) + 2b,$$
$$y = a\sin(kt) + a.$$

Eliminând parametrul t între cele două relaţii, se obţine ecuaţia analitică a traiectoriei absolute.

$$y = \frac{a}{A}x + \frac{a}{A}(A - 2b),$$

care reprezintă o dreaptă.

Mişcarea de transport fiind o translaţie, rezultă că $\vec{\omega}_t = 0$, deci, pe baza formulei (3.6), viteza de transport este

$$\vec{v}_t = \vec{v}_W = \dot{x}_W\vec{i} + \dot{y}_W\vec{j} = Ak\cos(kt)\vec{i}.$$

Viteza relativă a punctului M se calculează cu relaţia (3.4), obţinându-se

$$\vec{v}_r = \dot{x}''\vec{i}'' + \dot{y}''\vec{j}'' = ak\cos(kt)\vec{j}'' = ak\cos(kt)\vec{j}.$$

Viteza absolută a punctului M este dată de (3.18) şi este

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t = Ak\cos(kt)\,\vec{i} + ak\cos(kt)\,\vec{j},$$

cu componentele

$$\dot{x} = Ak\cos(kt),$$
$$\dot{y} = ak\cos(kt).$$

Accelerația relativă a punctului M se calculează cu relația (3.5), rezultând:

$$\vec{a}_r = \ddot{x}''\vec{i}'' + \ddot{y}''\vec{j}'' = -ak^2\sin(kt)\,\vec{j}'' = -ak^2\sin(kt)\,\vec{j}.$$

Accelerația de transport, datorită faptului că mișcare de transport este o translație, ceea ce conduce la $\vec{\omega}_t = 0$ și $\vec{\varepsilon}_t = 0$, are forma

$$\vec{a}_t = \vec{a}_W = \dot{x}_W\,\vec{i} + \dot{y}_W\,\vec{j} = -Ak^2\sin(kt)\,\vec{i}.$$

Accelerația Coriollis fiind nulă deoarece $\vec{\omega}_t = 0$, rezultă, conform (3.27), că accelerația absolută este:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_t + \vec{a}_r = -Ak^2\sin(kt)\,\vec{i} - ak^2\sin(kt)\,\vec{j},$$

cu componentele:

$$\ddot{x} = -Ak^2\sin(kt),$$
$$\ddot{y} = -ak^2\sin(kt).$$

2. O placă dreptunghiulară ABCD de dimensiuni AB = a și BC = 2a se rotește cu viteză unghiulară constantă $\vec{\omega}_0$ în jurul laturii AD. Un punct M se mișcă pe latura BC după legea $s = a\sin(kt)$, centrul de oscilație P fiind mijlocul acestei laturi (fig. 3.8). Să se determine traiectoria absolută, viteza absolută și accelerația absolută a punctului M, (OA = a).

Mișcarea de transport este mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe executată de placă. Reperul fix $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ și reperul mobil $R''(W,\vec{i}'',\vec{j}'',\vec{k}'')$ se aleg cu planele xOy și $x''Wy''$ coincizând și cu axele Oz

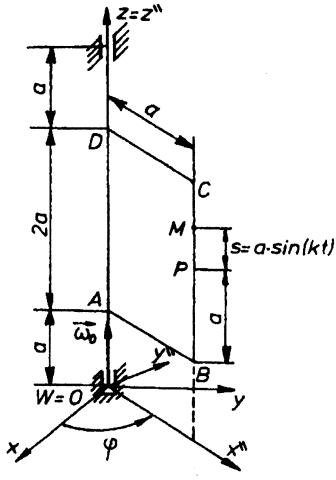

Fig. 3.8

şi Wz'' suprapuse, polul O fiind identic cu polul W. Numărul parametrilor de poziţie se reduce la unul singur şi anume la unghiul de rotaţie φ.

Mişcarea relativă a punctului M este o mişcare rectilinie oscilatorie armonică.

Reperul mobil este astfel ales încât să conţină placa ABCD în planul $x''Wz''$ iar, la momentul iniţial t = 0, se consideră că axele Wx'' şi Ox coincid. În aceste condiţii, avem:

$$\dot{\varphi} = \omega_0 = \frac{d\varphi}{dt},$$

de unde, prin integrare, rezultă:

$$\varphi = \omega_0 t.$$

Tabela de înmulţire a versorilor capătă forma

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}''$	$\cos(\omega_0 t)$	$\sin(\omega_0 t)$	0
$\vec{j}''$	$-\sin(\omega_0 t)$	$\cos(\omega_0 t)$	0
$\vec{k}''$	0	0	1

Ecuaţiile mişcării relative sunt

$$x'' = a,\ y'' = 0,\ z'' = 2a + a\sin(kt).$$

Traiectoria absolută a punctului M este

$$\vec{r} = \vec{r}'',$$

deoarece $\vec{r}_W = 0$, relaţie care se scrie analitic

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = a\vec{i}'' + (2a + a\sin(kt))\vec{k}''.$$

Proiectarea pe axele reperului fix a relaţiei anterioare conduce la ecuaţiile parametrice ale traiectoriei absolute:

$$x = a\cos(\omega_0 t),$$
$$y = a\sin(\omega_0 t),$$
$$z = 2a + a\sin(kt).$$

Dacă se ridică la pătrat primele două relaţii şi se sumează, se obţine

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

care reprezintă ecuaţia unei suprafeţe cilindrice, fapt care arată că punctul descrie o sinusoidă situată pe un cilindru.

Viteza de transport este:

$$\vec{v}_t = \vec{\omega}_t \times \vec{r}'' = \begin{vmatrix} \vec{i}'' & \vec{j}'' & \vec{k}'' \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ a & 0 & 2a + a\sin(kt) \end{vmatrix} = a\omega_0 \vec{j}'',$$

deoarece $\vec{v}_W = 0$.

Viteza relativă a punctului M are expresia:

$$\vec{v}_r = ak\cos(kt)\vec{k}'',$$

ceea ce conduce la următoarea relaţie pentru viteza absolută:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t = a\omega_0 \vec{j}'' + ak\cos(kt)\vec{k}''.$$

Pentru a calcula acceleraţia de transport, se observă mai întâi că acceleraţia unghiulară $\vec{\varepsilon}_t$ şi acceleraţia polului W, $\vec{a}_W$, sunt nule, deci formula de calcul a acceleraţiei de transport devine:

$$\vec{a}_t = \vec{\omega}_t \times (\vec{\omega}_t \times \vec{r}'') = \vec{\omega}_t \times \vec{v}_t = \begin{vmatrix} \vec{i}'' & \vec{j}'' & \vec{k}'' \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ 0 & a\omega_0 & 0 \end{vmatrix} = -a\omega_0^2 \vec{i}''.$$

Acceleraţia relativă a punctului M are expresia:

$$\vec{a}_r = -ak^2 \sin(kt)\vec{k}'',$$

iar acceleraţia Coriollis se calculează cu formula:

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_t \times \vec{v}_r = 0,$$

ea fiind nulă deoarece, în acest caz, cei doi vectori sunt paraleli.

Accelerația absolută a punctului M devine

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_c = -a\omega_0^2 \vec{i}'' - ak^2 \sin(kt)\vec{k}''.$$

3. O placă semicirculară de rază R se deplasează cu punctele diametral opuse A şi B pe două drepte perpendiculare, punctul A având viteza $\vec{v}_0$ constantă, cunoscută (fig. 3.9). Un punct M se deplasează pe semicerc cu viteza $\vec{u}$ de modul constant. Cunoscând că în momentul inițial, $t = 0$, punctele O, A şi M coincid, să se calculeze traiectoria absolută, viteza absolută şi accelerația absolută a punctului M.

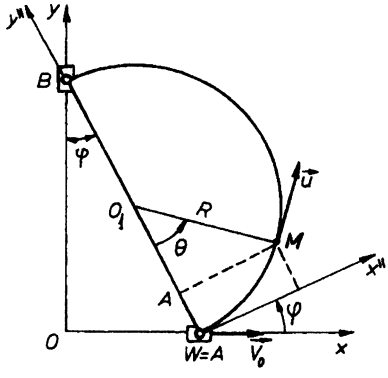

Fig. 3.9

Mişcarea de transport, executată de placa semicirculară, este o mişcare plan-paralelă. Reperul mobil $R''(W, \vec{i}'', \vec{j}'', \vec{k}'')$ se alege cu polul W în A, care se mişcă rectiliniu şi uniform cu viteza $\vec{v}_0$, şi cu axa Wy'' de-a lungul diametrului. Între axa Ox şi axa Wx'' avem unghiul φ (fig. 3.9). Parametrii de poziție sunt

$$x_W = 2R\sin\varphi,\ y_W = 0,\ \varphi = \varphi(t).$$

Tabela de înmulțire a versorilor se scrie pe baza relației (2.85) sub forma

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}''$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	0
$\vec{j}''$	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0
$\vec{k}''$	0	0	1

Ţinând cont că mişcarea relativă este o mişcare circulară uniformă, viteza unghiulară este

$$\dot{\theta} = \omega_0 = \frac{u}{R},$$

iar legea mişcării relative este, conform (1.121):

$$\theta = \omega_0 t = \frac{u}{R} t,$$

deoarece la momentul iniţial t = 0, $\theta(0) = 0$, după cum precizează datele problemei.

Folosind triunghiul dreptunghic O_1AM (fig. 3.9), se obţin ecuaţiile mişcării relative ale punctului M:

$$x'' = R\sin\theta = R\sin\left(\frac{u}{R}t\right),$$

$$y'' = R - R\cos\theta = R - R\cos\left(\frac{u}{R}t\right)$$

Traiectoria absolută a punctului M se scrie vectorial:

$$x\vec{i} + y\vec{j} = 2R\sin\varphi\,\vec{i} + R\sin\left(\frac{u}{R}t\right)\vec{i}'' + R\left(1 - \cos\left(\frac{u}{R}t\right)\right)\vec{j}'',$$

de unde, folosind tabela de înmulţire a versorilor, se obţin, prin proiectare pe axele reperului fix, ecuaţiile parametrice ale traiectoriei absolute

$$x = R\sin\varphi + R\cos\varphi\sin\left(\frac{u}{R}t\right) + R\sin\varphi\cos\left(\frac{u}{R}t\right),$$

$$y = R\cos\varphi + R\sin\varphi\sin\left(\frac{u}{R}t\right) - R\cos\varphi\cos\left(\frac{u}{R}t\right).$$

Parametrul φ poate fi exprimat în funcţie de timp folosind legea mişcării rectilinii şi uniforme a polului W

$$2R\sin\varphi = v_0 t,$$

de unde

$$\varphi = \arcsin\frac{v_0 t}{2R} \text{ cu } t \in \left[0, \frac{2R}{v_0}\right).$$

Viteza relativă a punctului M este

$$\vec{v}_r = u\cos\left(\frac{u}{R}t\right)\vec{i}'' + u\sin\left(\frac{u}{R}t\right)\vec{j}''.$$

Pentru a calcula viteza de transport este necesar să se cunoască viteza unghiulară de transport $\vec{\omega}_t = \dot{\varphi}\vec{k} = \dot{\varphi}\vec{k}''$. Ea se poate calcula în mai multe moduri, cel mai simplu constând în egalarea vitezei polului W cu derivata vectorului de poziţie:

$$\dot{\vec{r}}_W = 2R\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{i} = v_0\,\vec{i},$$

de unde:

$$\dot{\varphi} = \frac{v_0}{2R\cos\varphi}.$$

Viteza de transport rezultă de forma

$$\vec{v}_t = \vec{v}_W + \vec{\omega}_t \times \vec{r}'' = v_0\,\vec{i} - \dot{\varphi}R\left(1 - \cos\left(\frac{u}{R}t\right)\right)\vec{i}'' + \dot{\varphi}R\sin\left(\frac{u}{R}t\right)\vec{j}''.$$

Acum se poate calcula viteza absolută a punctului M, obţinându-se

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t = v_0\,\vec{i} + \left[u\cos\left(\frac{u}{R}t\right) - \frac{v_0}{2\cos\varphi}\left(1 - \cos\left(\frac{u}{R}t\right)\right)\right]\vec{i}'' +$$

$$+\left[u\sin\left(\frac{u}{R}t\right) + \frac{v_0}{2\cos\varphi}\sin\left(\frac{u}{R}t\right)\right]\vec{j}'',$$

având componentele corespunzătoare reperului fix

$$\dot{x} = \frac{v_0}{2} + \left(u + \frac{v_0}{2\cos\varphi}\right)\cos\left(\frac{u}{R}t + \varphi\right),$$

$$\dot{y} = -\frac{v_0}{2}\operatorname{tg}\varphi + \left(u + \frac{v_0}{2\cos\varphi}\right)\sin\left(\frac{u}{R}t + \varphi\right).$$

Acceleraţia relativă are expresia:

$$\vec{a}_r = -\frac{u^2}{R}\sin\left(\frac{u}{R}t\right)\vec{i}'' + \frac{u^2}{R}\cos\left(\frac{u}{R}t\right)\vec{j}''.$$

Pentru a calcula accelerația de transport, se calculează, mai întâi, accelerația unghiulară $\vec{\varepsilon}_t = \ddot{\varphi}\vec{k} = \ddot{\varphi}\vec{k}''$

$$\vec{\varepsilon}_t = \frac{v_0 \sin\varphi}{2R\cos^2\varphi}\dot{\varphi}\,\vec{k}'' = \frac{v_0^2 \sin\varphi}{4R^2\cos^3\varphi}\,\vec{k}''$$

și se observă că $\vec{a}_W = 0$. Rezultă că:

$$\vec{a}_t = \vec{\varepsilon}_t \times \vec{r}'' + \vec{\omega}_t \times (\vec{\omega}_t \times \vec{r}'') = [-\ddot{\varphi}R(1-\cos\theta) - \dot{\varphi}^2 R\sin\theta]\,\vec{i}'' +$$

$$+[\ddot{\varphi}R\sin\theta - \dot{\varphi}^2 R(1-\cos\theta)]\,\vec{j}''.$$

Accelerația Coriollis este:

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_t \times \vec{v}_r = -2\dot{\varphi}u\sin\left(\frac{u}{R}t\right)\vec{i}'' + 2\dot{\varphi}u\cos\left(\frac{u}{R}t\right)\vec{j}''.$$

Acum se poate calcula accelerația absolută:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_c = \left[-\frac{u^2}{R}\sin\left(\frac{u}{R}t\right) - \frac{v_0^2\sin\varphi}{4R\cos^3\varphi} - \frac{v_0^2}{4R\cos^3\varphi}\sin\left(\frac{u}{R}t-\varphi\right) - \right.$$

$$\left. -\frac{v_0 u}{R\cos\varphi}\sin\left(\frac{u}{R}t\right)\right]\vec{i}'' + \left[\frac{u^2}{R}\cos\left(\frac{u}{R}t\right) - \frac{v_0^2\sin\varphi}{4R\cos^2\varphi} + \frac{v_0^2}{4R\cos^3\varphi}\cos\left(\frac{u}{R}t-\varphi\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{v_0 u}{R\cos\varphi}\cos\left(\frac{u}{R}t\right)\right]\vec{j}''$$

ale cărei proiecții pe axe sunt

$$a_x = -\frac{u^2}{R}\sin\left(\frac{u}{R}t+\varphi\right) - \frac{v_0 u}{R\cos\varphi}\sin\left(\frac{u}{R}t+\varphi\right) - \frac{v_0^2}{4R\cos^3\varphi}\sin\left(\frac{u}{R}t\right),$$

$$a_y = \frac{u^2}{R}\cos\left(\frac{u}{R}t+\varphi\right) + \frac{v_0 u}{R\cos\varphi}\cos\left(\frac{u}{R}t+\varphi\right) - \frac{v_0^2}{4R\cos^3\varphi}\left(1-\cos\left(\frac{u}{R}t\right)\right).$$