CAPITOLUL I

CINEMATICA MIŞCĂRII ABSOLUTE A PUNCTULUI

1.1. Traiectoria, viteza, accelerația

Fie un reper $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ considerat fix şi M un punct mobil. Mişcarea punctului M în intervalul de timp $[t_0,t_1]$ este cunoscută dacă se poate determina poziția punctului față de reperul $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ în orice moment $t\in[t_0,t_1]$.

Poziția punctului M la momentul t este determinată prin vectorul de poziție $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ care depinde de timp (fig. 1.1):

$$\vec{r}=\vec{r}(t),\quad t\in[t_0,t_1]. \tag{1.1}$$

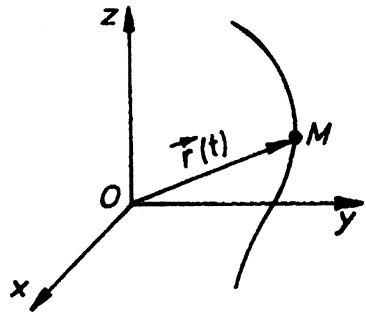

Fig. 1.1

Relația (1.1) se numeşte ecuația sau legea de mişcare a punctului M, deoarece permite aflarea poziției punctului M în orice moment din intervalul $[t_0,t_1]$ în care are loc mişcarea.

Funcția vectorială $\vec{r}(t)$ trebuie să fie continuă, uniformă, finită în modul şi cel puțin de două ori derivabilă în raport cu timpul. Aceste restricții sunt impuse de fenomenul fizic pe care îl modelează.

Fenomenele în care derivata întâi a funcției $\vec{r}(t)$ are o discontinuitate pentru o anumită valoarea a lui t, cum sunt ciocnirile, vor fi studiate se-

parat.

Vom nota cu acelaşi simbol atât punctul mobil cât şi punctul din spaţiu prin care trece el la un moment dat t.

Traiectoria punctului M este locul geometric al poziţiilor sale succesive în spaţiu, ceea ce este totuna cu locul geometric al extremităţii vectorului de poziţie $\vec{r}$ când t variază în intervalul de mişcare. În general, traiectoria este o curbă oarecare în spaţiu, regulată pe porţiuni şi rectificabilă.

De multe ori forma traiectoriei atrage denumirea mişcării. De exemplu, dacă traiectoria este o dreaptă, mişcarea se numeşte rectilinie sau, dacă traiectoria este un cerc, mişcarea se numeşte circulară.

Pe o traiectorie dată, mişcarea punctului poate avea loc în diverse moduri. Pentru a caracteriza complet mişcarea unui punct se definesc noţiunile de viteză instantanee şi de acceleraţie instantanee.

Observaţie:

În mecanică, derivata în raport cu timpul se notează printr-un punct situat deasupra simbolului mărimii de derivat. Notarea diferită a derivatei în raport cu timpul faţă de derivata obişnuită în raport cu o altă variabilă răspunde necesităţii, constatate în mecanică, de a distinge grafic cele două categorii de derivate.

Se numeşte viteză a punctului M la momentul t sau viteză instantanee, mărimea vectorială dată de derivata în raport cu timpul a vectorului de poziţie

$$\vec{v} \overset{def}{=} \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}, \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{1.2}$$

Viteza este un vector legat de punctul M. Se va arăta că acest vector este tangent la traiectorie şi că este orientat în sensul mişcării.

Se consideră vectorul

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t') - \vec{r}(t)}{t' - t} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{t' - t}, \tag{1.3}$$

care se numeşte viteză medie a punctului în intervalul de timp $[t,t']$. Acest vector are ca suport coarda MM' şi sensul de la M la M', adică sensul mişcării (fig. 1.2). Viteza medie depinde de momentele t şi t'. Pentru a obţine o informaţie cât mai precisă, trebuie micşorat intervalul de timp între momentele t şi t'. Acest lucru se realizează printr-un proces de trecere la limită care are ca rezultat obţinerea vitezei instantanee a punctului M la momentul t

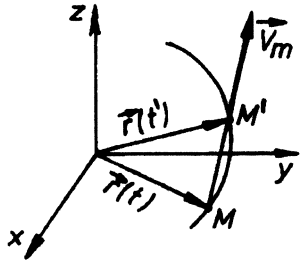

Fig. 1.2

$$\vec{v} = \lim_{t' \to t} \frac{\vec{r}(t') - \vec{r}(t)}{t' - t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \qquad (1.4)$$

Din cele de mai sus rezultă că viteza este un vector tangent la traiectorie în punctul M şi orientat în sensul mişcării (fig. 1.3). Considerăm acum un punctul fix Ω în care construim vectorul $\overrightarrow{\Omega P}$ echipolent cu vectorul $\vec{v}(t)$. Când t variază în intervalul de mişcare $[t_0,t_1]$, extremitatea P a vectorului $\overrightarrow{\Omega P}$ construit pentru valorile lui t din acest interval, va descrie o curbă numită hodograful vitezei (fig. 1.4). În aceeaşi idee, traiectoria poate fi interpretată ca fiind hodograful vectorului de poziţie, iar viteza este tangentă la acest hodograf.

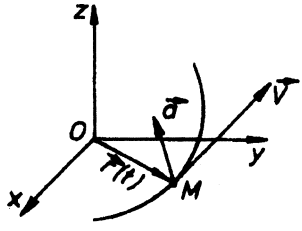

Fig. 1.3

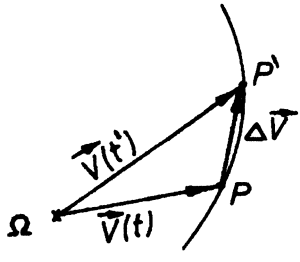

Fig. 1.4

Se consideră acum, pe hodograful vitezei, două momente t şi t' (fig. 1.4) între care variaţia vitezei punctului este

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t') - \vec{v}(t) = \overrightarrow{PP'}. \qquad (1.5)$$

Se poate defini acum mărimea vectorială acceleraţie medie ca fiind raportul dintre variaţia vitezei într-un interval de timp şi acel interval

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t') - \vec{v}(t)}{t' - t} = \frac{\Delta\vec{v}}{t' - t}. \tag{1.6}$$

Printr-un proces de trecere la limită, se obţine accelerаţia momentană

$$\vec{a} = \lim_{t' \to t} \frac{\vec{v}(t') - \vec{v}(t)}{t' - t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}. \tag{1.7}$$

Se numeşte accelerаţie a punctului M la momentul t sau accelerаţie instantanee, mărimea vectorială dată de derivata în raport cu timpul a vectorului viteză:

$$\vec{a} \overset{def}{=} \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}. \tag{1.8}$$

Vectorul accelerаţie instantanee $\vec{a}$ caracterizează variaţia vectorului viteză şi este un vector tangent la hodograful vitezei. În mod analog cu introducerea hodografului vitezei se poate introduce hodograful accelerаţiei. De asemenea se pot defini accelerаţii de ordin superior.

Se va arăta că vectorul accelerаţie este conţinut în planul osculator al traiectoriei relativ la punctul M.

În cazul unei mişcări oarecare pe o curbă oarecare, vectorul viteză are o mărime variabilă şi o orientare variabilă deoarece el este tangent la traiectorie în fiecare moment al mişcării. Se pot distinge însă trei cazuri particulare importante:

a. vectorul viteză are modulul constant în intervalul de timp $[t_0, t_1]$ al mişcării punctului pe traiectorie

$$|\vec{v}| = v_0 = cst, \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{1.9}$$

În această situaţie, numai orientarea vectorului viteză se modifică în timp, iar mişcarea punctului în intervalul considerat se spune că este uniformă, indiferent de forma traiectoriei.

Deoarece

$$\vec{v}^2 = |\vec{v}|^2 = v_0^2 = cst., \tag{1.10}$$

rezultă, prin derivare, că

$$2\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}} = 2\vec{v}\cdot\vec{a} = 0, \tag{1.11}$$

adică

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = 0, \tag{1.12}$$

ceea ce arată că, în acest caz particular al mişcării uniforme pe o curbă oarecare, vectorii viteză şi acceleraţie sunt perpendiculari. Vectorul $\vec{a}$ este nenul deoarece derivata unui vector de modul constant dar de orientare variabilă este nenulă;

b. vectorul viteză are numai orientarea constantă în intervalul de timp $[t_0, t_1]$ al mişcării punctului pe traiectorie. Acest lucru înseamnă că tangenta la traiectorie nu-şi modifică orientarea, deci traiectoria este o dreaptă, adică mişcarea este rectilinie, dar cu mărimea vitezei variabilă;

c. vectorul viteză este constant în intervalul de timp $[t_0, t_1]$ al mişcării punctului pe traiectorie, adică

$$\vec{v} = \vec{v}_0 = \overrightarrow{cst}. \tag{1.13}$$

Acest lucru înseamnă că rămân constante atât orientarea cât şi modului vectorului, mişcarea punctului fiind rectilinie şi uniformă.

În acest caz, vectorul acceleraţie este nul

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}_0 = 0. \tag{1.14}$$

Pe de altă parte, plecând de la faptul că vectorul acceleraţie este nul, rezultă, prin integrare, că vectorul viteză este constant, adică faptul că mişcarea este rectilinie şi uniformă. Se poate concluziona că singura mişcare în care vectorul acceleraţie este nul este mişcarea rectilinie şi uniformă.

1.2. Studiul mişcării punctului raportată la diferite sisteme de coordonate

Prin studiul mişcării unui punct cu lege de mişcare dată, se înţelege determinarea traiectoriei, vitezei şi acceleraţiei sale în orice moment al intervalului de mişcare $[t_0, t_1]$.

Pentru studiul mişcării unui punct se pot folosi, în funcţie de situaţie, diferite sisteme de coordonate.

1.2.1. Studiul mişcării punctului în coordonate carteziene

Fie $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un reper cartezian drept cu originea în punctul O şi prevăzut cu o bază ortogonală $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. În raport cu acest reper considerat fix, poziţia unui punct mobil M este dată de coordonatele sale x, y şi z care sunt funcţii de timp:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{1.15}$$

Legea de mişcare (1.1) este echivalentă cu relaţiile (1.15) fapt pentru care ele definesc legea de mişcare a punctului M în coordonate carteziene. În acelaşi timp, relaţiile (1.15) constituie şi ecuaţiile parametrice ale traiectoriei, parametrul fiind t.

Ecuaţiile analitice ale traiectoriei se obţin din (1.15) prin eliminarea variabilei independente t.

Traiectoria se mai poate trasa aproximativ prin puncte dând valori parametrului t în intervalul de mişcare.

Vectorul de poziţie al punctului M este:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{1.16}$$

unde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sunt versori constanţi (fig. 1.5), iar x, y şi z sunt coordonatele punctului M variabile în timp, conform cu relaţia (1.15).

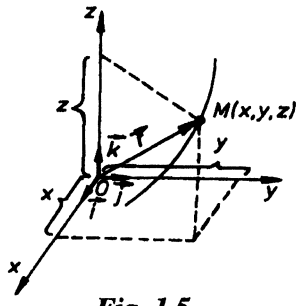

Fig. 1.5

Viteza punctului M este:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \tag{1.17}$$

cu componentele

$$v_x = \dot{x},\ v_y = \dot{y},\ v_z = \dot{z}, \tag{1.18}$$

şi cu modulul

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\,. \tag{1.19}$$

Acceleraţia punctului M este:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}, \tag{1.20}$$

cu componentele

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x},\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{y},\ a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}, \tag{1.21}$$

şi cu modulul

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \tag{1.22}$$

Cu ajutorul expresiilor analitice se pot deduce şi cosinusurile directoare ale vitezei şi acceleraţiei.

Un caz particular important este cel al mişcărilor plane. De regulă, planul mişcării este considerat planul xOy. În această situaţie coordonata z este nulă şi implicit derivatele ei. Prin urmare, legea de mişcare este

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = 0,\ t \in [t_0, t_1], \tag{1.23}$$

care sunt şi ecuaţiile parametrice ale traiectoriei. Eliminând parametrul t, se obţine ecuaţia analitică a traiectoriei sub formă implicită

$$f(x, y) = 0, \tag{1.24}$$

sau sub formă explicită:

$$y = f(x)\,. \tag{1.25}$$

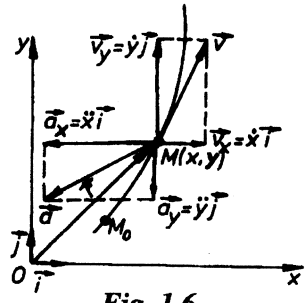

Fig. 1.6

Vectorii viteză şi acceleraţie devin respectiv

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}, \qquad (1.26)$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} \qquad (1.27)$$

şi sunt situaţi în planul mişcării (fig. 1.6).

1.2.2. Studiul mişcării punctului în coordonate polare

Se consideră un punct mobil M a cărui mişcare este plană. Fie Ox o semidreaptă fixă situată în planul mişcării, numită semiaxă polară, şi fie $\vec{i}$ versorul acestei axe. Distanţa de la polul O la punctul M se numeşte rază polară şi este notată cu ρ, cu

$$\left|\overrightarrow{OM}\right| = \left|\vec{r}\right| = \rho > 0, \qquad (1.28)$$

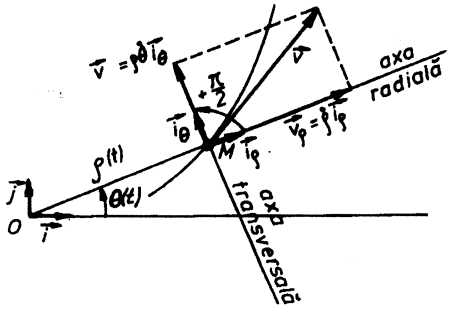

Fig. 1.7

iar unghiul orientat dintre axa Ox şi vectorul $\overrightarrow{OM}$ este notat cu θ şi este numit unghi polar. Numerele ρ şi θ sunt numite coordonatele polare ale punctului M (fig. 1.7). În coordonate polare, reperul are originea în punctul M, deci este mobil, iar cele două axe ale sale sunt axa radială, coliniară cu raza polară, şi axa transversală, perpendiculară pe prima. Versorul axei radiale este notat $\vec{i}_\rho$ şi este orientat în sensul creşterii razei polare iar versorul axei transversale este notat $\vec{i}_\theta$ şi se obţine din $\vec{i}_\rho$ prin rotirea

acestuia cu unghiul $+\frac{\pi}{2}$ (fig. 1.7).

Când punctul M se mişcă, coordonatele sale polare se modifică în timp

$$\rho = \rho(t),\ \theta = \theta(t),\ t \in [t_0, t_1]. \tag{1.29}$$

Relaţiile (1.29) reprezintă legea de mişcare a punctului M în coordonate polare şi, în acelaşi timp, ecuaţia parametrică a traiectoriei în coordonate polare.

Ecuaţia analitică a traiectoriei se determină eliminând parametrul t între relaţiile (1.29), obţinându-se forma implicită sau explicită a acesteia

$$f(\rho, \theta) = 0 \text{ sau } \rho = \rho(\theta). \tag{1.30}$$

Observând că vectorul de poziţie al punctului M este

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \rho \vec{i}_\rho, \tag{1.31}$$

se poate determina expresia vitezei şi a acceleraţiei în coordonate polare. Deoarece în timpul mişcării versorii $\vec{i}_\rho$ şi $\vec{i}_\theta$ îşi schimbă orientarea, deci nu sunt constanţi aşa cum erau $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ în coordonate carteziene, va trebui să determinăm derivatele lor în raport cu timpul. Mai întâi, din fig. 1.7, se deduce că

$$\begin{aligned} \vec{i}_\rho &= \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}, \\ \vec{i}_\theta &= -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}, \end{aligned} \tag{1.32}$$

în care $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ sunt versori constanţi. Derivăm apoi relaţiile (1.32) în raport cu timpul şi obţinem:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{i}}_\rho &= -\dot{\theta}\sin\theta \vec{i} + \dot{\theta}\cos\theta \vec{j} = \dot{\theta}\left(-\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}\right) = \dot{\theta} \cdot \vec{i}_\theta, \\ \dot{\vec{i}}_\theta &= -\dot{\theta}\cos\theta \vec{i} - \dot{\theta}\sin\theta \vec{j} = -\dot{\theta}\left(\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}\right) = -\dot{\theta} \cdot \vec{i}_\rho. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Plecând de la definiţia vitezei dată de relaţia (1.2), rezultă

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\vec{i}_\rho + \rho\dot{\vec{i}}_\rho = \dot{\rho}\vec{i}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{i}_\theta, \tag{1.34}$$

care reprezintă expresia analitică a vitezei în coordonate polare, deci în baza $(\vec{i}_\rho, \vec{i}_\theta)$. Proiecţiile pe axe şi modulul ei sunt

$$v_\rho = \dot{\rho},\ v_\theta = \rho\dot{\theta},\ |\vec{v}| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2}\ . \tag{1.35}$$

Derivând expresia analitică a vitezei în raport cu timpul, se obţine expresia analitică a acceleraţiei în coordonate polare

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\vec{i}_\rho + \dot{\rho}\dot{\vec{i}}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{i}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{i}_\theta + \rho\dot{\theta}\dot{\vec{i}}_\theta = \ddot{\rho}\vec{i}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{i}_\theta + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{i}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{i}_\theta - \rho\dot{\theta}^2\vec{i}_\rho, \tag{1.36}$$

adică

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{i}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)\vec{i}_\theta, \tag{1.37}$$

cu componentele şi modulul date de

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2,\ a_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta},\ |\vec{a}| = \sqrt{a_\rho^2 + a_\theta^2}\ . \tag{1.38}$$

În studiul mişcării punctului se foloseşte, uneori, viteza areolară. Pentru a o determina, considerăm un interval de timp $\Delta t = t' - t$ în care unghiul polar θ a variat cu $\Delta\theta = \theta(t') - \theta(t)$, iar raza polară a variat cu o cantitate $\Delta\rho$ şi a măturat o arie ΔA, haşurată în fig. 1.8. Aria ΔA este cuprinsă între ariile a două sectoare circulare. Presupunând că ρ a crescut cu cantitatea $\Delta\rho \geq 0$, se poate scrie

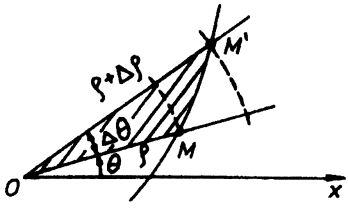

Fig. 1.8

$$\frac{\rho^2\Delta\theta}{2} \leq \Delta A \leq \frac{(\rho + \Delta\rho)^2\Delta\theta}{2}\ . \tag{1.38'}$$

Împărţind relaţia de mai sus la Δt şi trecând la limită, se obţine

$$\frac{\rho^2\dot{\theta}}{2} \leq \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t} \leq \frac{\rho^2\dot{\theta}}{2}, \tag{1.40}$$

în care produsele de termeni infinit mici s-au neglijat.

Mărimea

$$\Omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt} = \frac{\rho^2 \dot{\theta}}{2} \tag{1.41}$$

se numeşte viteză areolară şi este dată de aria măturată de raza polară în unitatea de timp. Ea se mai poate calcula cu formula

$$\left|\vec{\Omega}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \vec{v}\right| = \frac{\rho^2 \dot{\theta}}{2}, \tag{1.42}$$

unde vectorul

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\left(\vec{r} \times \vec{v}\right) \tag{1.43}$$

se numeşte vector viteză areolară. El se defineşte cu relaţia (1.43) şi pentru mişcări care nu sunt plane.

Se poate demonstra că dacă $\vec{\Omega}$ are direcţie fixă în spaţiu, atunci traiectoria punctului este o curbă plană, iar dacă $\vec{\Omega} = 0$ atunci traiectoria punctu-lui este rectilinie.

1.2.3. Studiul mişcării punctului în coordonate cilindrice

Se consideră un plan fix (P), o semiaxă fixă Ox de versor $\vec{i}$ în acest plan şi un versor $\vec{k}$ perpendicular pe plan în punctul O. Fie M un punt mobil în spaţiu şi M_1 proiecţia lui pe planul (P) (fig. 1.9). Deoarece coordonatele polare ale lui M_1 sunt (ρ, θ), atunci poziţia lui M în spaţiu este determinată de tripleta (ρ, θ, z)

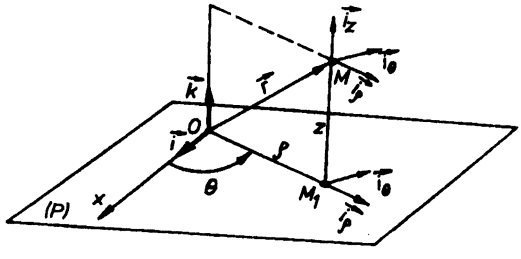

Fig. 1.9

unde ρ, θ şi z sunt numite coordonatele cilindrice ale punctului M, cu $z = \pm|MM_1|$.

În punctul M se construiesc versorii $\vec{i}_\rho$, $\vec{i}_\theta$ şi $\vec{i}_z$, unde $\vec{i}_\rho$ şi $\vec{i}_\theta$ sunt versorii reperului polar translaţi din M_1 în M iar $\vec{i}_z$ completează triedrul. Ecuaţiile de mişcare ale punctului M sunt

$$\rho = \rho(t),\ \theta = \theta(t),\ z = z(t), \quad t \in [t_0, t_1], \tag{1.44}$$

care sunt şi ecuaţiile parametrice ale traiectoriei.

Eliminând parametrul t se poate obţine ecuaţia analitică a traiectoriei.

Utilizând definiţia vitezei (1.2) şi observând, din fig. 1.9, că $\vec{r} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M}$, adică

$$\vec{r} = \rho\vec{i}_\rho + z\vec{i}_z \tag{1.45}$$

şi utilizând relaţiile de la coordonatele polare, se obţine

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{i}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{i}_\theta + \dot{z}\vec{i}_z, \tag{1.46}$$

cu componentele

$$v_\rho = \dot{\rho},\ v_\theta = \rho\dot{\theta},\ v_z = \dot{z}. \tag{1.47}$$

Derivând (1.46) rezultă acceleraţia punctului

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{i}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{i}_\theta + \ddot{z}\vec{i}_z. \tag{1.48}$$

În cazul particular când z = 0, se obţin coordonatele polare.

1.2.4. Studiul mişcării punctului folosind triedrul lui Frenet

Dacă un punct parcurge o traiectorie cunoscută pe care se alege un punct O_1 ca origine a arcelor de curbă s şi un sens de parcurgere, atunci poziţia punctului faţă de O_1 poate fi determinată prin coordonata intrinsecă sau

coordonata naturală s (fig. 1.10). Mişcarea punctului M este definită în acest caz printr-o singură funcţie scalară

$$s = s(t), \quad t \in [t_0, t_1], \tag{1.50}$$

numită ecuaţia orară a mişcării.

Se ataşează punctului M de pe traiectorie triedrul lui Frenet $(M, \vec{\tau}, \vec{v}, \vec{\beta})$ cu originea în punct şi cu axele (fig. 1.10):

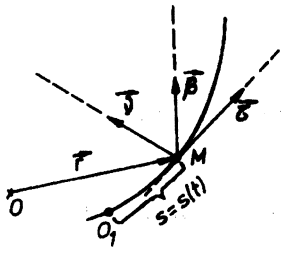

Fig. 1.10

- tangenta la curbă în punctul M având versorul $\vec{\tau}$ orientat în sensul creşterii lui s cu

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}, \tag{1.51}$$

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziţie a punctului A;

- normala principală, adică normala la curbă în planul osculator, având versorul $\vec{v}$ orientat spre centrul de curbură;
- binormala, perpendiculară în M pe planul osculator, având versorul $\vec{\beta}$, ales astfel încât $\vec{\tau}$, $\vec{v}$ şi $\vec{\beta}$, în această ordine, să formeze un triedru drept $(\vec{\beta} = \vec{\tau} \times \vec{v})$.

Triedrul definit mai sus este mobil şi se numeşte triedrul lui Frenet.

Când vectorul de poziţie $\vec{r}$ se exprimă în funcţie de arcul s, se obţine ecuaţia intrinsecă a curbei

$$\vec{r} = \vec{r}(s). \tag{1.52}$$

Expresia analitică a vitezei se obţine prin derivarea relaţiei (1.52), rezultând

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}(s)}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s}\frac{d\vec{r}}{ds}. \tag{1.53}$$

Folosind relaţia

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}, \tag{1.54}$$

se obţine

$$\vec{v} = \dot{s}\vec{\tau} = \tilde{v}\vec{\tau} \text{ cu } \tilde{v} = \pm|\vec{v}|, \tag{1.55}$$

$\tilde{v}$ fiind mărimea algebrică a vitezei, adică include semnul şi modului vectorului.

Viteza este tangentă la traiectorie în punctul M, este orientată în sensul mişcării şi are mărimea algebrică $\tilde{v} = \dot{s}$. Dacă într-un interval de timp $\tilde{v} = \dot{s} > 0$, atunci s creşte iar vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{\tau}$ au acelaşi sens iar dacă, într-un interval de timp $\tilde{v} = \dot{s} < 0$, atunci s scade iar vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{\tau}$ au sensuri opuse, rezultând deci că $\vec{v}$ indică sensul de mişcare.

Proiecţiile vitezei pe axele triedrului lui Frenet sunt

$$v_\tau = \dot{s},\ v_\nu = 0,\ v_\beta = 0, \tag{1.56}$$

iar modulul este

$$|\vec{v}| = |\dot{s}|. \tag{1.57}$$

Acceleraţia se obţine prin derivarea vitezei în raport cu timpul

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}\dot{\vec{\tau}}, \tag{1.58}$$

în care

$$\dot{\vec{\tau}} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \dot{s}\frac{1}{R_c}\vec{\nu}, \tag{1.59}$$

unde s-a utilizat prima formulă a lui Frenet

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{R_c}\vec{\nu}, \tag{1.60}$$

R_c fiind raza de curbură a traiectoriei în punctul M.

Vectorul acceleraţia se mai scrie acum sub forma

$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{R_c}\vec{\nu} = \dot{\tilde{v}}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R_c}\vec{\nu}. \tag{1.61}$$

Relaţia (1.61) arată că, în orice moment, acceleraţia este conţinută în planul osculator.

Proiecţiile acceleraţiei pe axele triedrului lui Frenet sunt

$$a_\tau = \ddot{s} = \dot{\tilde{v}},\ a_\nu = \frac{\dot{s}^2}{R_c} = \frac{v^2}{R_c},\ a_\beta = 0, \tag{1.62}$$

iar modulul este

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_\nu^2}\,. \tag{1.63}$$

Componenta normală a acceleraţiei sau acceleraţia normală

$$\vec{a}_\nu = \frac{\dot{s}^2}{R_c}\vec{\nu} = \frac{v^2}{R_c}\vec{\nu} \tag{1.64}$$

este dirijată după normala principală la traiectorie în punctul considerat, având totdeauna sensul spre concavitatea curbei deoarece mărimea algebrică a componentei $\tilde{a}_\nu = \frac{v^2}{R_c}$ este strict pozitivă cu excepţia mişcării rectilinii când $\frac{1}{R_c} = 0$ şi deci componenta se anulează. Rezultă că $\vec{a}_\nu$ şi $\vec{v}$ au mereu acelaşi sens.

Componenta tangenţială a acceleraţiei sau acceleraţia tangenţială

$$\vec{a}_\tau = \ddot{s}\vec{\tau} = \dot{\tilde{v}}\vec{\tau} \tag{1.65}$$

este coliniară cu viteza dar vectorii $\vec{a}_\tau$ şi $\vec{v}$ pot avea acelaşi sens, sensuri opuse sau este posibil ca $\vec{a}_\tau$ să fie nul.

Deoarece

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = \vec{v}(\vec{a}_\tau + \vec{a}_\nu) = \vec{v}\cdot\vec{a}_\tau = \tilde{v}\cdot\dot{\tilde{v}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\tilde{v}^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{|\vec{v}|^2}{2}\right), \tag{1.66}$$

rezultă că sunt posibile următoarele trei situaţii:

a) $\vec{v}\cdot\vec{a} = \vec{v}\cdot\vec{a}_\tau > 0$, caz în care $\vec{v}$ şi $\vec{a}_\tau$ au acelaşi sens, unghiul dintre vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{a}$ este ascuţit, iar modulul vitezei creşte deoarece derivata sa este pozitivă, ceea ce arată că mişcarea este

accelerată (fig. 1.11);

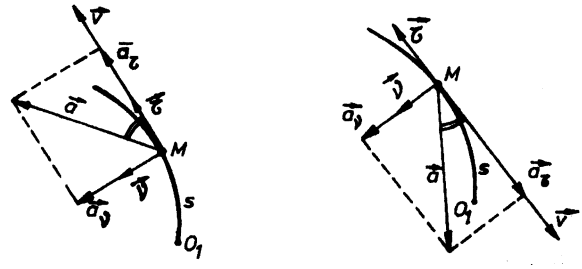

Fig. 1.11

b) $\vec{v}\cdot\vec{a}=\vec{v}\cdot\vec{a}_\tau<0$, caz în care $\vec{v}$ şi $\vec{a}_\tau$ au sensuri opuse, unghiul dintre vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{a}$ este obtuz, iar modulul vitezei scade deoarece derivata este negativă, ceea ce arată că mişcarea este încetinită (fig. 1.12);

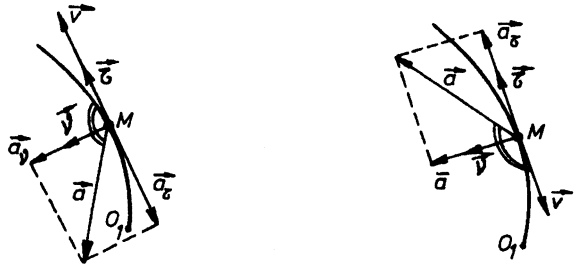

Fig. 1.12

c) $\vec{v}\cdot\vec{a}=\vec{v}\cdot\vec{a}_\tau=0$, caz în care rezultă că $|\vec{v}|$ este constant deoarece derivata este nulă, ceea ce arată că mişcarea este uniformă (fig. 1.13). Vectorul acceleraţie are o singură componentă nenulă în mişcarea uniformă pe o curbă oarecare

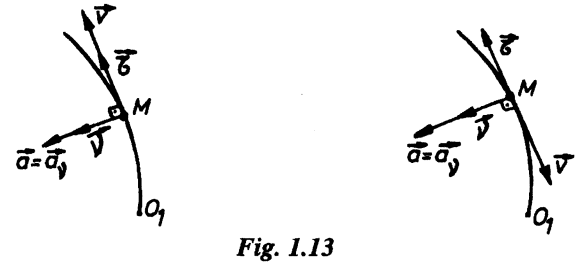

Fig. 1.13

$$\vec{a} = \vec{a}_v = \frac{v^2}{R_c}\vec{v} \neq 0 \qquad (1.67)$$

deoarece $\vec{a}_\tau = \dot{\tilde{v}}\vec{\tau} = 0$, iar vectorul accelerație este perpendicular pe viteză.

Observații

1. Legea mișcării uniforme a unui punct pe o curbă oarecare se poate deduce cunoscând că, la acest tip de mișcare, modulul vitezei este constant în intervalul de timp $[t_0, t_1]$. Deoarece viteza, în cadrul genului de mișcări pe care le studiem acum, nu are discontinuități, rezultă că și mărimea algebrică a ei este constantă, adică

$$\tilde{v} = v_0 = \text{cst.} \qquad (1.68)$$

Integrând relația (1.68) scrisă sub forma $\frac{ds}{dt} = v_0$, se obține

$$s = v_0 t + s_0, \qquad (1.69)$$

care este legea mișcării uniforme pe o curbă oarecare, unde s este coordonata naturală. Vectorii viteză și accelerație sunt

$$\vec{v} = v_0\vec{\tau} \text{ și } \vec{a} = \frac{v_0^2}{R_c}\vec{v}. \qquad (1.70)$$

În acest tip de mișcare componenta tangențială a accelerației este nulă iar vectorii $\vec{v}$ și $\vec{a}$ sunt perpendiculari.

Pe baza celor de mai sus, mișcarea uniformă pe o curbă oarecare se poate defini ca mișcarea în cadrul căreia accelerația tangențială este nulă.

2. Dacă pentru $t \in [t_0, t_1]$ accelerația tangențială este constantă $a_\tau = a_0 = \text{cst.}$, mișcarea se numește uniform variată. Deoarece

$$a_\tau = a_0 = \ddot{s}, \qquad (1.71)$$

rezultă, după o primă integrare, relația

$$v = \dot{s} = a_0 t + v_0, \tag{1.72}$$

iar, după a doua integrare, relaţia

$$s = a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t + s_0, \tag{1.73}$$

care este legea mişcării uniform variate pe o curbă oarecare.

Vectorii viteză şi acceleraţie sunt

$$\vec{v} = (a_0 t + v_0)\vec{\tau}, \ \vec{a} = a_0 \vec{\tau} + \frac{(v_0 + a_0 t)^2}{R_c}\vec{\nu}. \tag{1.74}$$

Dacă se elimină timpul între relaţiile (1.72) şi (1.73) se obţine relaţia lui Galilei

$$v^2 = v_0^2 + 2a_0(s - s_0). \tag{1.75}$$

3. Dacă se cunosc ecuaţiile parametrice ale traiectoriei se poate calcula raza de curbură a traiectoriei în orice punct al ei. Plecând de la

$$\vec{v} \times \vec{a} = \tilde{v}\vec{\tau} \times \left(\dot{\tilde{v}}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R_c}\vec{\nu} \right) = \tilde{v}\frac{v^2}{R_c}\vec{\beta} \tag{1.76}$$

şi aplicând modulul, rezultă

$$R_c = \frac{|\vec{v}|^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|}. \tag{1.77}$$

În cazul mişcării plane cu legea de mişcare dată de (1.23), avem

$$R_c = \frac{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}}{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}, \tag{1.78}$$

iar dacă legea de mişcare este dată de (1.29), atunci

$$\vec{v} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i}_\rho & \vec{i}_\theta & \vec{i}_z \\ \dot{\rho} & \rho\dot{\theta} & 0 \\ \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 & 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} & 0 \end{vmatrix} = \left[\dot{\rho}\left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right) - \rho\dot{\theta}\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right) \right]\vec{i}_z \tag{1.79}$$

care conduce la

$$R_c = \frac{\sqrt{\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2\right)^3}}{\left|\dot{\rho}\left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right) - \rho\dot{\theta}\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\right|}. \tag{1.80}$$

Dacă ecuaţia traiectoriei este $y = f(x)$ atunci

$$R_c = \frac{\sqrt{\left(1 + y'^2\right)^3}}{|y''|} \tag{1.81}$$

unde cu „$'$" s-a notat derivata în raport cu x.

Dacă ecuaţia traiectoriei este $\rho = \rho(\theta)$ atunci

$$R_c = \frac{\sqrt{\left(\rho^2 + \rho'^2\right)^3}}{\left|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''\right|}, \tag{1.82}$$

unde $\rho' = \dfrac{d\rho}{d\theta}$.

Dacă ecuaţia traiectoriei este $f(x, y) = 0$ atunci

$$R_c = \frac{\sqrt{\left(f_x^2 + f_y^2\right)^3}}{|\Delta|}, \tag{1.83}$$

unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_x \\ f_{xy} & f_{yy} & f_y \\ f_x & f_y & 0 \end{vmatrix}, \tag{1.84}$$

iar indicii notează derivatele parţiale în raport cu variabilele respective.

4. Dacă se cunosc $\vec{v}$ şi $\vec{a}$, acceleraţiile normală şi tangenţială se pot calcula în două moduri:

a) folosind expresia (1.77) se calculează acceleraţia normală

$$a_\nu = \frac{v^2}{R_c} = \frac{v^2}{|\vec{v}|^3} \cdot |\vec{v} \times \vec{a}| = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|} \tag{1.85}$$

şi apoi

$$a_\tau = \pm\sqrt{a^2 - a_\nu^2}\,, \tag{1.86}$$

semnul stabilindu-se în fiecare caz concret pe baza semnului produsului $\vec{v} \cdot \vec{a}$ şi a sensului versorului $\vec{\tau}$;

b) folosind expresia versorului tangent la traiectorie

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{\tilde{v}}, \tag{1.87}$$

se calculează accelerația tangențială

$$\vec{a}_\tau = \tilde{a}_\tau \vec{\tau} = (\vec{a} \cdot \vec{\tau})\vec{\tau} = \left(\vec{a} \cdot \frac{\vec{v}}{\tilde{v}}\right) \cdot \frac{\vec{v}}{\tilde{v}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v^2} \cdot \vec{v}, \tag{1.88}$$

iar utilizând relația

$$v^2 \vec{a} - (\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{v} = \vec{v} \times (\vec{a} \times \vec{v}), \tag{1.89}$$

se calculează accelerația normală

$$\vec{a}_\nu = \vec{a} - \vec{a}_\tau = \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v^2}\vec{v} = \frac{v^2 \cdot \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v}}{v^2} = \frac{\vec{v} \times (\vec{a} \times \vec{v})}{v^2}. \tag{1.90}$$

5. Singura mişcare cu accelerație nulă este mişcarea rectilinie şi uniformă.

Într-adevăr, dacă $\vec{a} = 0$ atunci $|\vec{a}| = 0$, ceea ce înseamnă că $\vec{a}_\tau$ şi $\vec{a}_\nu$ sunt nule. Ultimele două relații conduc la

$$\ddot{s} = 0 \text{ şi } \frac{v^2}{R_c} = 0. \tag{1.91}$$

Integrând prima relație de mai sus, se obține

$$\dot{s} = v_0 = \text{cst.}, \tag{1.92}$$

ceea ce arată că mişcarea este uniformă. A doua relație din (1.91) conduce la

$$\frac{1}{R_c} = 0, \tag{1.93}$$

ceea ce arată că mişcarea se produce pe o dreaptă.

6. Singurele mişcări în care viteza este coliniară cu acceleraţia sunt mişcările rectilinii.

Dacă viteza şi acceleraţia sunt coliniare, atunci acceleraţia normală este nulă, ceea ce revine la (1.93).

1.3. Mişcări particulare ale punctului

1.3.1. Mişcarea rectilinie a punctului

În mişcarea rectilinie, traiectoria este un segment de dreaptă sau o dreaptă, coordonata naturală s(t) coincide cu abscisa x(t)

$$x = x(t) = s(t) \ \ (y = 0,\ z = 0), \tag{1.94}$$

versorul $\vec{\tau}$ este un vector constant $\vec{\tau} = \vec{i}$, iar $\frac{1}{R_c} = 0$.

Legea de mişcare, viteza şi acceleraţia sunt complet precizate prin

$$x = x(t),\ \tilde{v} = \dot{x}(t),\ \tilde{a} = \ddot{x}(t),\ \ t \in [t_0, t_1] \tag{1.95}$$

şi, din acest motiv, uneori nu se mai folosesc expresiile vectoriale.

În mişcarea rectilinie oarecare, adică atunci când legea de mişcare $x = x(t)$ este o funcţie oarecare, viteza şi acceleraţia au expresiile

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\,\vec{i} = \dot{s}\,\vec{\tau} \tag{1.96}$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\,\vec{i} = \ddot{s}\,\vec{\tau} = \dot{\tilde{v}}\,\vec{i} \tag{1.97}$$

deci sunt coliniare. Dacă, într-un interval de timp, viteza şi acceleraţia au acelaşi sens, atunci mişcarea este accelerată, dacă au sensuri opuse mişcarea este încetinită, iar dacă acceleraţia este nulă, mişcarea este uniformă.

Funcţiile date de (1.95) se pot reprezenta grafic având timpul în

abscisă. Când pe ordonată este x(t), curba se numeşte grafic al mişcării sau diagrama mişcării. Când pe ordonată este $\dot{x}(t)$ sau $\ddot{x}(t)$, graficele acestor funcţii se numesc diagrama vitezei şi respectiv diagrama acceleraţiei.

Atunci când x(t) are o anumită formă, se obţin mişcări rectilinii particulare. În continuare vor fi prezentate cele mai importante dintre acestea.

a. **Mişcarea rectilinie şi uniformă** este mişcarea pentru care este valabilă relaţia (1.69) scrisă sub forma

$$x = x_0 + v_0 t, \quad t \in [0, t_1], \tag{1.98}$$

unde x_0 şi v_0 sunt constante reale ce reprezintă poziţia punctului la momentul iniţial $t = 0$ şi respectiv viteza punctului pe traiectorie.

Vectorii viteză şi acceleraţie sunt de forma

$$\vec{v} = v_0 \vec{i}, \ \vec{a} = 0, \ t \in [0, t_1], \tag{1.99}$$

ceea ce arată că vectorul viteză este constant iar vectorul acceleraţie este nul.

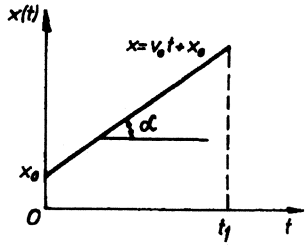

Fig. 1.14

Diagrama mişcării (fig. 1.14) este o dreaptă pentru care $tg\alpha = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = v_0$, adică panta dreptei este viteza punctului.

b. **Mişcarea rectilinie uniform variată** este mişcarea pentru care este valabilă legea de mişcare dată de (1.73) scrisă sub forma

$$x = a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0, \ t \in [0, t_1], \tag{1.100}$$

unde x_0, v_0 şi a_0 sunt constante ce reprezintă poziţia şi viteza punctului la $t = 0$ şi, respectiv, acceleraţia punctului pe traiectorie.

Vectorii viteză şi acceleraţie sunt de forma

$$\vec{v} = (a_0 t + v_0)\vec{i}, \ \vec{a} = a_0 \vec{i}, \ t \in [0, t_1], \tag{1.101}$$

ceea ce arată că vectorul accelerație este un vector constant.

Diagrama de mişcare este o parabolă, diagrama vitezei este o dreaptă având panta egală cu accelerația punctului iar diagrama accelerației este o dreaptă paralelă cu axa absciselor.

Mişcarea poate fi uniform accelerată când viteza şi accelerația au acelaşi sens sau uniform încetinită când viteza şi accelerația au sensuri opuse.

C. **Mişcarea rectilinie oscilatorie armonică** are loc atunci când legea de mişcare are forma

$$x = A\sin(kt + \alpha), \quad t \in [0, t_1] \tag{1.102}$$

unde A, k şi α sunt constante.

Abscisa x se numeşte elongație şi are valorile extreme +A şi –A unde $A > 0$ se numeşte amplitudine. Argumentul $\varphi = kt + \alpha$ este faza oscilației, k este pulsația oscilației iar $\alpha = \varphi(0)$ este faza inițială.

Mişcarea are loc de o parte şi de alta a punctului O numit centru de oscilație (fig. 1.15) şi este periodică. Perioada T este intervalul de timp dintre două treceri succesive prin aceeaşi poziție în acelaşi sens. Ea se calculează folosind relația

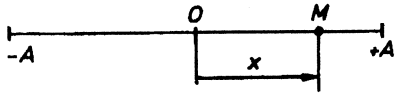

Fig. 1.15

$$x(t + T) = x(t) \quad \forall t \tag{1.103}$$

adică

$$A\sin[k(t + T) + \alpha] = A\sin(kt + \alpha), \tag{1.104}$$

deci

$$k(t + T) + \alpha = kt + \alpha + 2\pi \tag{1.105}$$

de unde

$$T = \frac{2\pi}{k}, \tag{1.106}$$

ceea ce arată că perioada nu depinde de amplitudine ci numai de pulsație.

Frecvenţa de oscilaţie ν este

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi}, \tag{1.107}$$

se măsoară în hertzi şi reprezintă numărul de oscilaţii complete (de perioade) efectuate în unitatea de timp.

Viteza şi acceleraţia au expresiile

$$\tilde{v} = \dot{x} = Ak\cos(kt + \alpha) \tag{1.108}$$

$$\tilde{a} = \dot{\tilde{v}} = \ddot{x} = -Ak^2\sin(kt + \alpha) = -k^2 x \tag{1.109}$$

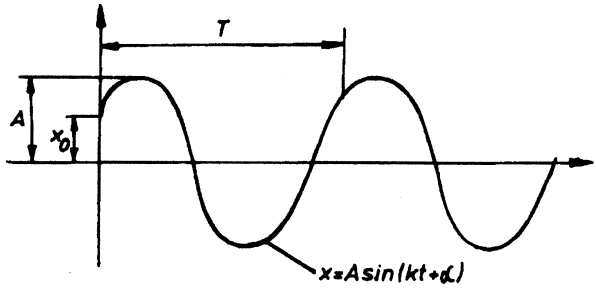

Fig. 1.16

ceea ce arată că acceleraţia este proporţională cu elongaţia.

Diagrama de mişcare este prezentată în fig. 1.16.

1.3.2. Mişcarea circulară a punctului

Traiectoria fiind dată, mişcarea poate fi studiată folosind proiecţiile vitezei şi acceleraţiei pe axele triedrului lui Frenet.

Fie M un punct mobil pe un cerc de centrul O şi rază R şi O_1 un punct fix pe circumferinţă, numit origine, în raport cu care se exprimă coordonata naturală s a punctului mobil. Axele triedrului lui Frenet sunt (fig. 1.17):

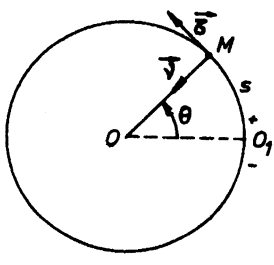

Fig. 1.17

- tangenta în M la cerc având versorul $\vec{\tau}$ orientată în sensul crescător al arcului $O_1M = s$;
- normala principală având direcţia razei cercului în punctul M şi având versorul $\vec{\nu}$ orientat spre centrul O care este şi centrul de curbură. Raza de curbură R_c este constantă

şi egală cu raza cercului, de altfel cercul fiind singura curbă plană cu raza de curbură constantă;

- binormala, perpendiculară în M pe planul cercului, având versorul $\vec{\beta} = \vec{\tau} \times \vec{\nu}$, care nu este figurat în desen.

Considerând unghiul θ dintre OO_1 şi OM a cărui mărime variază în timpul mişcării şi socotind coordonata naturală s din punctul O_1 în sensul în care θ creşte, pe baza faptului că lungimea unui arc de cerc este egală cu produsul dintre raza cercului şi unghiul la centru exprimat în radiani, se poate scrie relaţia

$$s = R \cdot \theta, \quad t \in [0, t_1], \tag{1.110}$$

în care

$$\theta = \theta(t), \quad t \in [0, t_1]. \tag{1.111}$$

Rezultă că mişcarea circulară este caracterizată de funcţia $s = s(t)$ sau de funcţia $\theta = \theta(t)$.

Derivata în raport cu timpul a unghiului $\theta = \theta(t)$ se numeşte viteză unghiulară:

$$\tilde{\omega} = \dot{\theta}(t), \tag{1.112}$$

iar derivata vitezei unghiulare se numeşte acceleraţie unghiulară

$$\tilde{\varepsilon} = \dot{\tilde{\omega}} = \ddot{\theta}(t). \tag{1.113}$$

Viteza unghiulară $\tilde{\omega}$ arată sensul mişcării, adică sensul de rotaţie, şi se măsoară în radiani pe secundă sau s^{-1}.

Acceleraţia unghiulară $\tilde{\varepsilon}$ se măsoară în s^{-2} şi caracterizează variaţia vitezei unghiulare.

Pe baza faptului că $\dot{s} = R\dot{\theta} = R\tilde{\omega}$, viteza punctului M este

$$\vec{v} = \dot{s}\vec{\tau} = R\dot{\theta}\vec{\tau} = R\tilde{\omega}\vec{\tau}, \ \tilde{v} = R\tilde{\omega}, \ |\vec{v}| = R|\omega|. \tag{1.114}$$

Accelerația punctului M, folosind faptul că $\ddot{s} = R\ddot{\theta} = R\tilde{\varepsilon}$ și că $R_c = R$, are expresia

$$\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{\tau} + R\dot{\theta}^2\vec{\nu} = R\tilde{\varepsilon}\vec{\tau} + R\omega^2\vec{\nu} = R\tilde{\varepsilon}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{\nu} \qquad (1.115)$$

cu componentele

$$a_\tau = R\tilde{\varepsilon},\ a_\nu = R\omega^2 = \frac{v^2}{R} \qquad (1.116)$$

și modulul

$$|\vec{a}| = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,. \qquad (1.117)$$

Pentru a preciza caracterul accelerat, încetinit sau uniform al mișcării, se calculează produsul $\vec{v}\cdot\vec{a}$

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = \vec{v}\cdot\vec{a}_\tau = R^2\tilde{\omega}\tilde{\varepsilon} = R^2\tilde{\omega}\dot{\tilde{\omega}} = R^2\frac{d}{dt}\left(\frac{|\omega|^2}{2}\right), \qquad (1.118)$$

care arată că atunci când $\tilde{\omega}\tilde{\varepsilon} > 0$, adică $\tilde{\omega}$ și $\tilde{\varepsilon}$ au același semn, mișcarea este accelerată deoarece $|\omega|$ crește iar când $\tilde{\omega}\cdot\tilde{\varepsilon} < 0$, adică $\tilde{\omega}$ și $\tilde{\varepsilon}$ au semne diferite, mișcarea este încetinită deoarece $|\omega|$ scade. Când, într-un interval de timp, $\tilde{\omega}\cdot\tilde{\varepsilon} = 0$, atunci înseamnă că $\tilde{\varepsilon} = 0$ iar mișcarea este uniformă și are loc cu viteză unghiulară constantă ω_0. În figura 1.18 sunt reprezentate viteza și accelerația în cele trei situații.

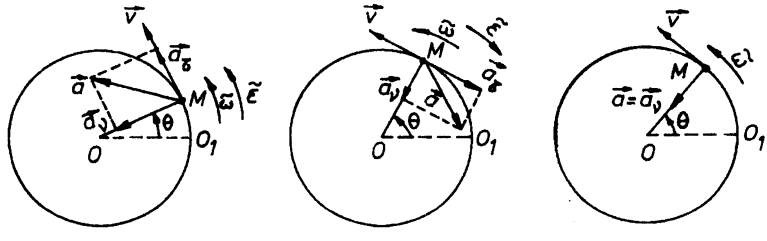

Fig. 1.18

Ca şi în cazul mişcării rectilinii, în mişcarea circulară sunt trei situaţii particulare importante.

a. **Mişcarea circulară uniformă**, caracterizată de faptul că viteza are modul constant, ceea ce implică

$$\dot{\theta} = \omega_0 = \text{cst. şi } \ddot{\theta} = \tilde{\varepsilon} = 0 . \tag{1.119}$$

Rezultă că legea mişcării circulare uniforme este

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t, \quad t \in [0, t_1], \tag{1.120}$$

unde $\theta_0 = \theta(0)$. Dacă la $t = 0$ avem $\theta_0 = 0$, adică punctul M pleacă din O_1, legea mişcării circulare uniforme devine

$$\theta = \omega_0 t, \quad t \in [0, t_1] \tag{1.121}$$

Se observă că în această mişcare particulară viteza unghiulară este constantă iar accelerația unghiulară este nulă. Expresiile vitezei, accelerației şi ale modulelor lor sunt

$$\vec{v} = R\omega_0 \vec{\tau}, \qquad |\vec{v}| = R|\omega_0| = v_0 = \text{cst.}, \tag{1.122}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_v = R\omega_0^2 \vec{v}, \qquad |\vec{a}| = R\omega_0^2 = \frac{v_0^2}{R}, \tag{1.123}$$

ceea ce arată că viteza şi accelerația sunt perpendiculare.

În cele mai multe situații practice, se cunoaşte numărul de rotații pe minut (turația), n, pe care le execută punctul M. Viteza unghiulară este dată de

$$\omega_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{60} = \frac{\pi \cdot n}{30}, \tag{1.124}$$

iar legea de mişcare devine

$$\theta = \frac{\pi n}{30} t . \tag{1.125}$$

b. **Mişcarea circulară uniform variată**, caracterizată prin aceea că $a_\tau = a_0 = \text{cst.}$, ceea ce implică

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_0 = \text{cst.} \tag{1.126}$$

Integrând de două ori, se obţine

$$\tilde{\omega} = \varepsilon_0 t + C_1, \tag{1.127}$$

şi

$$\theta = \varepsilon_0 \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2. \tag{1.128}$$

Constantele C_1 şi C_2 sunt viteza unghiulară şi respectiv unghiul θ la momentul iniţial $t = 0$:

$$\tilde{\omega}(0) = \omega_0 = C_1; \tag{1.129}$$

$$\theta(0) = \theta_0 = C_2. \tag{1.130}$$

Legea mişcării circulare uniform variate (1.126) se scrie acum:

$$\theta = \varepsilon_0 \frac{t^2}{2} + \omega_0 t + \theta_0, \quad t \in [0, t_1], \tag{1.131}$$

iar viteza, acceleraţia şi modulele lor sunt

$$\vec{v} = R(\omega_0 + \varepsilon_0 t)\vec{\tau}, \qquad |\vec{v}| = R|\omega_0 + \varepsilon_0 t|, \tag{1.132}$$

$$\vec{a} = R\varepsilon_0 \vec{\tau} + R(\omega_0 + \varepsilon_0 t)^2 \vec{v}, \qquad |\vec{a}| = R\sqrt{\varepsilon_0^2 + (\omega_0 + \varepsilon_0 t)^2}. \tag{1.133}$$

C. **Mişcarea circulară oscilatorie armonică** are legea de mişcare dată de

$$\theta = \Theta \sin(kt + \alpha), \tag{1.134}$$

în care Θ, k şi α sunt constante ale căror semnificaţii sunt aceleaşi ca la mişcarea rectilinie oscilatorie armonică.

Viteza şi acceleraţia unghiulară se obţin prin derivare şi sunt de forma

$$\tilde{\omega} = \dot{\theta} = k\Theta \cos(kt + \alpha), \tag{1.135}$$

$$\tilde{\varepsilon} = \dot{\tilde{\omega}} = \ddot{\theta} = -k^2 \Theta \sin(kt + \alpha) = -k^2 \theta, \tag{1.136}$$

cu care se deduc foarte simplu expresiile vitezei şi acceleraţiei.

Observaţie

Mişcarea circulară se poate studia şi în coordonate carteziene sau polare.

În coordonate carteziene, alegând axa Ox după direcţia OO_1, avem

$$x = R\cos\theta,\ y = R\sin\theta, \tag{1.137}$$

astfel că

$$\vec{v} = -R\dot{\theta}\sin\theta\vec{i} + R\dot{\theta}\cos\theta\vec{j}, \tag{1.138}$$

$$\vec{a} = -R(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\vec{i} + R(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)\vec{j}. \tag{1.139}$$

În coordonate polare, luând semiaxa polară pe direcţia OO_1, versorii axelor vor fi

$$\vec{i}_\theta = \vec{\tau},\ \vec{i}_\rho = -\vec{\nu} \tag{1.140}$$

iar

$$\rho = R,\ \theta = \theta(t),\ t \in [0, t_1]. \tag{1.141}$$

Deoarece $\dot{\rho} = 0$, viteza şi accelerаţia capătă forma

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{i}_\theta, \tag{1.142}$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{i}_\rho + R\ddot{\theta}\vec{i}_\theta, \tag{1.143}$$

iar viteza areolară este

$$\Omega = \frac{1}{2}R\dot{\theta}^2. \tag{1.144}$$

1.3.3. Mişcarea punctului pe elicea cilindrică de pas constant

Se consideră un punct M care se deplasează pe o elice cilindrică situată pe un cilindru circular drept de rază R, pasul h al elicei fiind constant, iar unghiul de înfăşurare fiind β (fig. 1.19a). Se desfăşoară elicea, obţinându-se segmente paralele de traiectorie (fig. 1.19b), punctele A şi A', B şi B', C şi C' fiind puncte care coincid atunci când elicea este înfăşurată pe ci-

lindru.

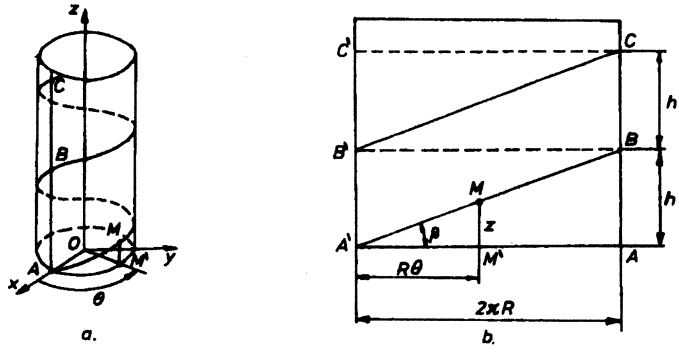

Fig. 1.19

Din triunghiul dreptunghic $A'AB$ se deduce tangenta unghiului de înfăşurare

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{h}{2\pi R}. \tag{1.145}$$

Ecuaţiile de mişcare ale punctului M sunt

$$x = R\cos\theta,\ y = R\sin\theta, z = R\theta\,\mathrm{tg}\beta, \tag{1.146}$$

în care $\theta = \theta(t)$.

Viteza şi acceleraţia punctului M au expresiile

$$\vec{v} = -R\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{i} + R\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{j} + R\dot{\theta}\,\mathrm{tg}\beta\,\vec{k}, \tag{1.147}$$

$$\vec{a} = -R(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\,\vec{i} + R(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)\,\vec{j} + R\ddot{\theta}\,\mathrm{tg}\beta\,\vec{k}, \tag{1.148}$$

şi modulele

$$|\vec{v}| = \frac{R|\dot{\theta}|}{\cos\beta},\ |a| = R\sqrt{\frac{\ddot{\theta}^2}{\cos^2\beta} + \dot{\theta}^4}. \tag{1.149}$$

Se calculează raza de curbură cu ajutorul componentei tangenţiale a acceleraţiei:

$$R_c = \frac{v^2}{a_v} = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - a_\tau^2}} = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - \dot{\tilde{v}}^2}} = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - |\dot{\vec{v}}|^2}} = \frac{R}{\cos^2\beta}, \tag{1.150}$$

ceea ce arată că raza de curbură a traiectoriei este constantă în orice punct.

1.4. Aplicaţii

1. Un punct are legea de mişcare $x = 2t$ şi $y = 4t^2 - 1$. Să se determine: traiectoria, viteza, accelerația, caracterul mişcării, accelerația normală, raza de curbură, accelerația tangențială. Pentru t = 0,5 s să se deseneze viteza şi accelerația cu componentele lor.

Ecuația traiectoriei se obține eliminând parametrul t între relațiile care reprezintă legea de mişcare sau ecuația parametrică a traiectoriei. Din prima relație rezultă $t = \frac{x}{2}$ şi, înlocuind în cea de a doua, rezultă

$$y = x^2 - 1$$

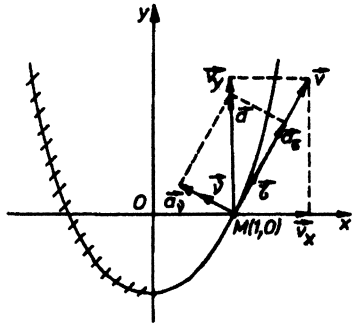

Fig. 1.20

care este ecuația unei parabole (fig. 1.20). Deoarece t este pozitiv, rezultă $x \geq 0$ deci traiectoria punctului este numai ramura din dreapta a parabolei. Punctul pleacă pe traiectorie în momentul $t = 0$ din vârful acesteia $(x(0) = 0,\ y(0) = -1)$.

Viteza punctului este

$$\vec{v} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} = 2\vec{i} + 8t\,\vec{j},$$

iar accelerația este

$$\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} = 8\,\vec{j}.$$

Caracterul mişcării este dat de poziția față de zero a produsului $\vec{v} \cdot \vec{a}$

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = 64t > 0,$$

deci mişcarea este accelerată. Rezultă că punctul pleacă din vârful parabolei pe ramura din dreapta având o mişcare accelerată, deci el nu se va mai

întoarce pe traiectorie.

Raza de curbură se calculează cu formula (1.77), dar, mai întâi, se determină

$$\vec{v}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 8t & 0\\ 0 & 8 & 0\end{vmatrix}=16\vec{k},$$

de unde

$$R_c=\frac{|v|^3}{|\vec{v}\times\vec{a}|}=\frac{\sqrt{(4+64t^2)^3}}{16}.$$

Accelerația normală este:

$$\vec{a}_v=\frac{v^2}{R_c}\vec{v}=\frac{4+64t^2}{\sqrt{(4+64t^2)^3}}\cdot 16\vec{v}=\frac{16}{\sqrt{4+64t^2}}\vec{v}.$$

Accelerația tangențială este:

$$\vec{a}_\tau=\pm\sqrt{a^2-a_v^2}\,\vec{\tau}=\pm\sqrt{64-\frac{256}{4+64t^2}}\,\vec{\tau}=\pm\frac{64t}{\sqrt{4+64t^2}}\vec{\tau}.$$

Deoarece $\vec{v}$ şi $\vec{\tau}$ au, în acest caz, acelaşi sens şi pentru că mişcarea este accelerată $\vec{v}$ şi $\vec{a}_\tau$ au acelaşi sens, rezultă că $\vec{\tau}$ şi $\vec{a}_\tau$ au acelaşi sens, deci semnul corect în relația de mai sus este pozitiv, rezultând

$$\vec{a}_\tau=\frac{64t}{\sqrt{4+64t^2}}\vec{\tau}.$$

Deoarece mărimea algebrică a lui $\vec{a}_\tau$ nu este constantă, rezultă că mişcarea punctului nu este uniform accelerată ci doar accelerată. Problema evidențiază clar faptul că, deşi accelerația punctului este constantă, mişcarea acestuia nu este uniform accelerată deoarece caracterul uniform accelerat este dat de condiția ca accelerația tangențială să fie constantă şi nu cea totală.

Pentru t = 0,5 s punctul are coordonatele x = 1, y = 0 şi avem:

$$\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j},\ \vec{a} = 8\vec{j},\ \vec{a}_v = \frac{8\sqrt{5}}{5}\vec{v},\ \vec{a}_\tau = \frac{16\sqrt{5}}{5}\vec{\tau},$$

vectori reprezentaţi în fig. 1.20.

2. Un punct are legea de mişcare $\rho = 4t$, $\theta = 2t$. Să se determine, în coordonate polare: traiectoria, viteza, acceleraţia, caracterul mişcării, acceleraţia normală, acceleraţia tangenţială. Pentru $t = \frac{\pi}{8}$ s să se deseneze viteza şi acceleraţia cu componentele lor.

Ecuaţia traiectoriei se obţine eliminând parametrul t între cele două ecuaţii parametrice ale traiectoriei care formează şi legea de mişcare. Se obţine, din relaţia a doua, $t = \frac{\theta}{2}$ şi, înlocuind în prima relaţie, rezultă

$$\rho = 2\theta,$$

care este ecuaţia analitică a traiectoriei în coordonate polare. Pentru trasarea ei prin puncte, se dau valori lui θ şi se calculează ρ:

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	...
ρ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	...

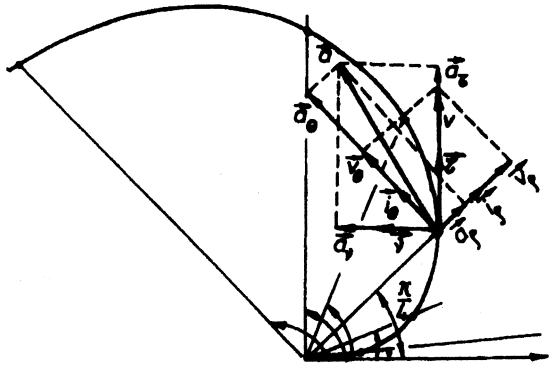

Fig. 1.21

Se desenează câte o semidreaptă pentru fiecare valoare a lui θ pe care, apoi, se măsoară ρ obţinându-se poziţia punctului pe traiectorie. Apoi se unesc punctele, obţinându-se forma traiectoriei, aşa cum se vede în fig. 1.21.

Viteza punctului este

$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\vec{i}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\vec{i}_\theta = 4\,\vec{i}_\rho + 8t\,\vec{i}_\theta,$$

iar accelerația sa este

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\,\vec{i}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\,\vec{i}_\theta = -16t\,\vec{i}_\rho + 16\,\vec{i}_\theta .$$

Produsul scalar dintre $\vec{v}$ și $\vec{a}$ este

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = -64t + 128t = 64t > 0,$$

deci mișcarea este accelerată, punctul plecând din origine pe traiectorie fără a se mai întoarce.

Pentru a obține raza de curbură, calculăm mai întâi

$$\vec{v}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i}_\rho & \vec{i}_\theta & \vec{i}_z \\ 4 & 8t & 0 \\ -16t & 16 & 0 \end{vmatrix} = (64 + 128t^2)\,\vec{i}_z ,$$

apoi

$$R_c = \frac{|v|^3}{|\vec{v}\times\vec{a}|} = \frac{\sqrt{(16+64t^2)^3}}{64+128t^2} .$$

Accelerația normală este:

$$\vec{a}_v = \frac{v^2}{R_c}\vec{v} = \frac{64+128t^2}{\sqrt{16+64t^2}}\vec{v} .$$

Accelerația tangențială este:

$$\vec{a}_\tau = \pm\sqrt{a^2 - a_v^2}\,\vec{\tau} = \pm\sqrt{256t^2 + 256 - \frac{(64+128t^2)^2}{16+64t^2}}\,\vec{\tau} = \pm\frac{64t}{\sqrt{16+64t^2}}\vec{\tau} ,$$

relație care arată că mișcarea nu este uniform accelerată. Semnul va fi plus deoarece $\vec{a}_\tau$ și $\vec{v}$ au același sens, $\vec{v}$ și $\vec{\tau}$ au același sens, deci $\vec{a}_\tau$ și $\vec{\tau}$ au același sens.

Pentru $t = \frac{\pi}{8}$ s, punctul are coordonatele polare $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\rho = \frac{\pi}{2}$ și avem

$$\vec{v} = 4\vec{i}_\rho + \pi\vec{i}_\theta,\ \vec{a} = -2\pi\vec{i}_\rho + 16\vec{i}_\theta,\ \vec{a}_v = \frac{64+2\pi^2}{\sqrt{16+\pi^2}}\vec{v},\ \vec{a}_\tau = \frac{8\pi}{\sqrt{16+\pi^2}}\vec{\tau},$$

vectori reprezentaţi în fig. 1.21.

3. Un punct P descrie o traiectorie plană formată din două arce de cerc având unghiurile la centru $\theta_1 = 1$ rad şi respectiv $\theta_2 = 1$ rad şi razele $R_1 = 10$ m şi $R_2 = 32$ m (fig. 1.22). Punctul are o mişcare uniform încetinită plecând din A cu viteza $v_A = v_0 = 10$ m/s şi ajungând în D cu viteza $v_D = 4$ m/s. Să se determine viteza şi acceleraţia punctului şi să se reprezinte diagramele $v = v(t)$, $a_\tau = a_\tau(t)$ şi $a_v = a_v(t)$.

Pentru a afla mărimea algebrică a acceleraţiei tangenţiale, se utilizează formula (1.75), rezultând:

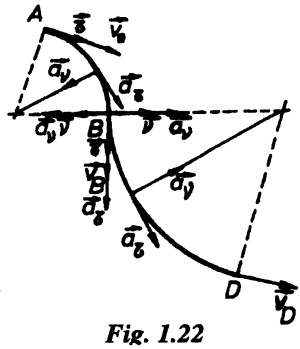

Fig. 1.22

$$a_0 = \frac{v_D^2 - v_A^2}{2s},$$

în care $s = R_1\theta_1 + R_2\theta_2 = 42$ m.

Se obţine

$$a_0 = a_\tau = -1 \text{ m/s}^2,$$

iar vectorul acceleraţie tangenţială este:

$$\vec{a}_\tau = -1 \cdot \vec{\tau}.$$

Viteza se calculează cu relaţia (1.74a), rezultând

$$\vec{v} = (10 - t)\vec{\tau}.$$

Viteza punctului material în punctul B se calculează folosind relaţia (1.75), rezultând

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + 2a_0 s} = \sqrt{v_A^2 + 2a_0 R_1\theta_1} = \sqrt{100 - 2\cdot 10} = \sqrt{80}\ \text{s} \approx 8{,}9\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Timpul t_B până când punctul ajunge în B se calculează pe baza relaţiei (1.72), rezultând:

$$t_B = \frac{v_B - v_0}{a_0} = \frac{8{,}9-10}{-1} = 1{,}1\ \text{s},$$

iar timpul total t_D de parcurgere a traiectoriei este

$$t_D = \frac{v_D - v_0}{a_0} = \frac{4-10}{-1} = 6\ \text{s}.$$

Acum se poate calcula accelerația normală care are expresii diferite pe cele două arce de cerc:

$$\vec{a}_v = \frac{v^2}{R_c}\vec{v} = \begin{cases} \dfrac{(10-t)^2}{10}\vec{v},\ t \in [0, t_B], \\ \dfrac{(10-t)^2}{32}\vec{v},\ t \in [t_B, t_D]. \end{cases}$$

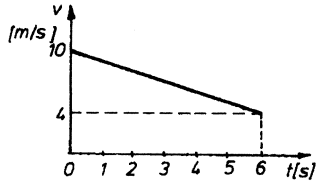

Fig. 1.23

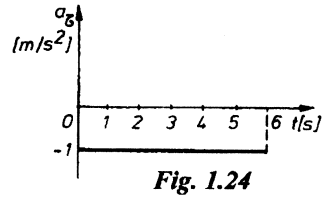

Fig. 1.24

Diagrama v(t) este reprezentată în fig. 1.23, diagrama $a_\tau(t)$ în fig. 1.24 iar diagrama $a_v(t)$ în fig. 1.25.

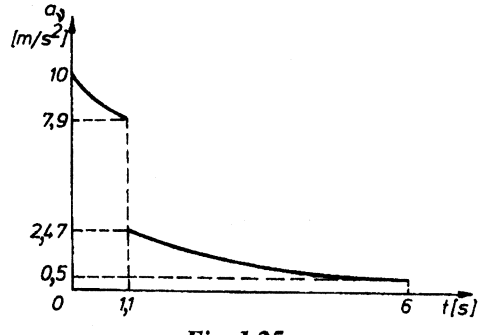

Fig. 1.25

Accelerația tangențială are o discontinuitate în punctul B care, dacă ținem cont și de schimbarea de sens a vectorului, este, de fapt, de $10{,}37\ \text{m/s}^2$. Aceste variații bruște trebuie evitate în practică prin micșorarea vitezei punctului în zona de racordare sau prin prevederea unei mici porțiuni rectilinii între cele două arce, accelerația normală modificându-se în trepte, adică de la $7{,}9\ \text{m/s}^2$ la zero și de la zero la $2{,}47\ \text{m/s}^2$, având astfel două salturi mici în loc de unul mare.