CAPITOLUL II

CINEMATICA MIŞCĂRII ABSOLUTE A SOLIDULUI RIGID

2.1. Generalităţi

Se consideră un solid rigid (S) în mişcare faţă de un sistem de referinţă fix $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Mişcarea corpului este cunoscută atunci când se poate determina în orice moment $t \in [0,t_1]$ poziţia unui punct oarecare M al solidului prin vectorul de poziţie $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \vec{r}(t)$, adică se cunoaşte legea de mişcare, din care se deduc apoi viteza $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ şi acceleraţia $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$ ale punctului faţă de reperul fix.

Pentru studiul mişcării este necesar să considerăm încă un reper $R'(O',\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$ solidar cu rigidul, care se mişcă odată cu acesta. Faţă de reperul R', punctul M are coordonatele x', y' şi z' constante în timpul mişcării, dar, faţă de reperul fix R, coordonatele x, y şi z ale punctului M sunt variabile, deci sunt funcţii de timp (fig. 2.1).

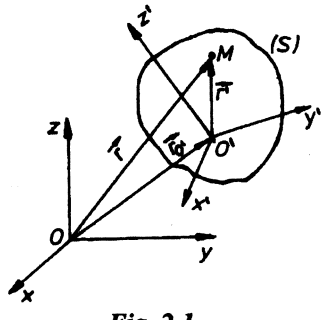

Fig. 2.1

Poziţia rigidului (S) faţă de reperul fix R este cunoscută dacă se cunoaşte poziţia reperului R' faţă de reperul R, adică se cunoaşte poziţia polului O' şi poziţia bazei ortonormate $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$ în orice moment $t \in [0,t_1]$ faţă de ba-

za reperului fix $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Sub formă vectorială, aceasta înseamnă să cunoaştem vectorii:

$$\vec{v}_{O'} = \vec{v}_{O'}(t) \text{ şi } \begin{cases} \vec{i}' = \vec{i}'(t) \\ \vec{j}' = \vec{j}'(t) \\ \vec{k}' = \vec{k}'(t) \end{cases}, \tag{2.1}$$

ceea ce revine la a putea determina în fiecare moment $t \in [0, t_1]$ poziţia originii O' prin coordonatele sale faţă de reperul fix şi poziţia axelor $O'x'$, $O'y'$ şi $O'z'$ dată, de exemplu, de cosinusurile lor directoare în raport cu reperul fix:

$$\vec{r}_{O'} = x_{O'}\vec{i} + y_{O'}\vec{j} + z_{O'}\vec{k} \text{ şi } \begin{cases} \vec{i}' = \alpha_{11}\vec{i} + \alpha_{12}\vec{j} + \alpha_{13}\vec{k} \\ \vec{j}' = \alpha_{21}\vec{i} + \alpha_{22}\vec{j} + \alpha_{23}\vec{k} \\ \vec{k}' = \alpha_{31}\vec{i} + \alpha_{32}\vec{j} + \alpha_{33}\vec{k} \end{cases} \tag{2.2}$$

Relaţiile (2.2) conţin 12 parametrii scalari şi anume cele trei coordonate ale polului O' şi cele nouă cosinusuri directoare.

Deoarece baza $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ este ortonormată, au loc relaţiile

$$\begin{aligned} &\vec{i}'^2 = 1, \quad &&\vec{j}'^2 = 1, \quad &&\vec{k}'^2 = 1, \\ &\vec{i}' \cdot \vec{j}' = 0, \quad &&\vec{j}' \cdot \vec{k}' = 0, \quad &&\vec{k}' \cdot \vec{i}' = 0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

adică:

$$\begin{gathered} \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 = 1, \ \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{23}^2 = 1, \ \alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 = 1 \\ \alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} + \alpha_{13}\alpha_{23} = 0, \ \alpha_{21}\alpha_{31} + \alpha_{22}\alpha_{32} + \alpha_{23}\alpha_{33} = 0, \\ \alpha_{31}\alpha_{11} + \alpha_{32}\alpha_{12} + \alpha_{33}\alpha_{13} = 0. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Existenţa acestor şase relaţii conduce la concluzia că, dintre cele nouă cosinusuri directoare, numai trei sunt independente şi deci, din totalul de 12 parametri scalari, rămân independenţi numai şase: trei sunt coordonatele originii O' şi trei sunt fie trei cosinusuri directoare independente între ele fie

alţi trei parametri independenţi aleşi convenabil cum sunt, de exemplu, unghiurile lui Euler.

Unghiurile lui Euler sunt notate ψ, φ şi θ şi, cu ajutorul lor, se pot determina toate cele nouă cosinusuri directoare α_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$. Aceste unghiuri se introduc aşa cum se arată în continuare. Mai întâi se construieşte în O' un reper $R^*(O', \vec{i}^*, \vec{j}^*, \vec{k}^*)$ cu axele paralele cu cele ale reperului fix, cu $\vec{i}^* = \vec{i}$, $\vec{j}^* = \vec{j}$ şi $\vec{k}^* = \vec{k}$ (fig. 2.2). Se consideră apoi dreapta $O'N$ de intersecţie a planului $P^*(O'x^*y^*)$ cu planul $P'(O'x'y')$, dreaptă ce se numeşte linia nodurilor.

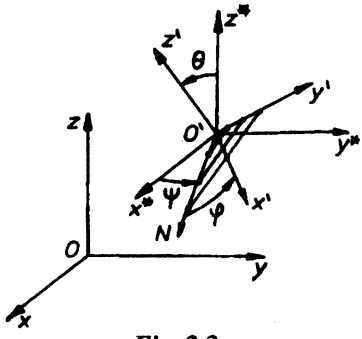

Fig. 2.2

Unghiul ψ, numit unghi de precesie, se obţine rotind axa $O'x^*$ în jurul axei $O'z^*$ (în planul $O'x^*y^*$) în sens direct, până se suprapune peste $O'N$.

Unghiul φ, numit unghi de rotaţie proprie, se obţine rotind axa $O'N$ în jurul axei $O'z'$ (în planul $O'x'y'$) în sens direct, până se suprapune peste $O'x'$.

Unghiul θ, numit şi unghi de nutaţie, se obţine rotind axa $O'z^*$ în jurul liniei nodurilor $O'N$, în sens direct până se suprapune peste $O'z'$.

Se va arăta ulterior modul de calcul a celor nouă cosinusuri directoare atunci când se cunosc cele trei unghiuri ale lui Euler.

Cei şase parametri scalari care determină poziţia reperului mobil, deci şi ai solidului, în raport cu un reper fix, sunt:

$$\begin{aligned} &x_{O'} = x_{O'}(t), \quad y_{O'} = y_{O'}(t), \quad z_{O'} = z_{O'}(t), \\ &\psi = \psi(t), \qquad \varphi = \varphi(t), \qquad \theta = \theta(t) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Aceşti şase parametri scalari se mai numesc şi parametri de poziţie ai reperului R' faţă de reperul R.

Într-o mişcare generală, toţi cei şase parametri de poziţie pot varia independent şi se spune că solidul rigid liber are şase grade de libertate.

Observaţie

Există un caz particular important de mişcare a unui solid rigid (S) şi anume când acesta se mişcă în spaţiu astfel încât o axă a reperului R', solidar cu el, rămâne paralelă cu ea însăşi în timpul mişcării. De regulă, această axă este $O'z'$, caz în care unghiul θ este nul, iar planele P* şi P' coincid, ceea ce face ca linia nodurilor să fie nedeterminată. Se consideră atunci că linia nodurilor coincide cu axa $O'x^*$ ceea ce conduce la $\psi = 0$. Dintre cele trei unghiuri ale lui Euler variază doar $\varphi = \varphi(t)$, unghiul de rotaţie proprie fiind format de axa $O'x^*$ cu axa $O'x'$ (fig. 2.3).

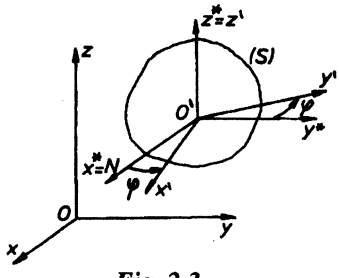

Fig. 2.3

În acest caz particular, din cei şase parametri de poziţie (5.5), numai patru sunt variabili în timp.

$$x_{O'} = x_{O'}(t),\ y_{O'} = y_{O'}(t),\ z_{O'} = z_{O'}(t),\quad \psi = 0,\quad \varphi = \varphi(t),\quad \theta = 0. \tag{2.6}$$

Relaţiile (2.2) capătă, în aceste condiţii, o formă particulară care se deduce uşor:

$$\vec{r}_{O'} = x_{O'}\vec{i} + y_{O'}\vec{j} + z_{O'}\vec{k},\quad \begin{cases} \vec{i}' = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j} \\ \vec{j}' = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j} \\ \vec{k}' = \vec{k} \end{cases} \tag{2.7}$$

2.2. Formulele lui Poisson

În mişcarea generală a unui solid rigid versorii $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ şi $\vec{k}'$, deşi au modul constant, îşi modifică orientarea, deci sunt variabili în timp şi, prin urmare, derivatele lor în raport cu timpul sunt nenule. Pentru a putea calcula

derivatele acestor versori, se calculează, mai întâi, derivatele în raport cu timpul a relațiilor (2.3), obținându-se:

$$\begin{aligned} &\dot{\vec{i}}'\cdot\vec{i}'=0, && \dot{\vec{j}}'\cdot\vec{j}'=0, && \dot{\vec{k}}'\cdot\vec{k}'=0, \\ &\dot{\vec{i}}'\cdot\vec{j}'+\vec{i}'\cdot\dot{\vec{j}}'=0, && \dot{\vec{j}}'\cdot\vec{k}'+\vec{j}'\cdot\dot{\vec{k}}'=0, && \dot{\vec{k}}'\cdot\vec{i}'+\vec{k}'\cdot\dot{\vec{i}}'=0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Se fac notațiile:

$$\begin{aligned} &\dot{\vec{j}}'\cdot\vec{k}'=-\vec{j}'\cdot\dot{\vec{k}}'=\omega'_x, \\ &\dot{\vec{k}}'\cdot\vec{i}'=-\vec{k}'\cdot\dot{\vec{i}}'=\omega'_y, \\ &\dot{\vec{i}}'\cdot\vec{j}'=-\vec{i}'\cdot\dot{\vec{j}}'=\omega'_z, \end{aligned} \tag{2.9}$$

care reprezintă mărimile algebrice ale proiecțiilor, pe axele reperului mobil, ale vectorilor reprezentați de versorii derivați. Scalarii ω'_x, ω'_y și ω'_z definesc un vector $\vec{\omega}$ de forma

$$\vec{\omega}=\omega'_x\vec{i}'+\omega'_y\vec{j}'+\omega'_z\vec{k}', \tag{2.10}$$

care caracterizează schimbarea direcției versorilor $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$.

Expresia analitică a vectorului $\dot{\vec{i}}'$ este

$$\dot{\vec{i}}'=\left(\dot{\vec{i}}'\cdot\vec{i}'\right)\vec{i}'+\left(\dot{\vec{i}}'\cdot\vec{j}'\right)\vec{j}'+\left(\dot{\vec{i}}'\cdot\vec{k}'\right)\vec{k}', \tag{2.11}$$

scrisă pe baza faptului că mărimea algebrică a proiecției unui vector pe o axă se obține înmulțind scalar vectorul cu versorul axei.

Ținând cont de relațiile (2.8) și (2.9), relația (2.11) se scrie:

$$\dot{\vec{i}}'=\omega'_z\vec{j}'-\omega'_y\vec{k}'=\begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ \omega'_x & \omega'_y & \omega'_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\vec{\omega}\times\vec{i}'. \tag{2.12}$$

Analog se arată că

$$\dot{\vec{j}}'=\vec{\omega}\times\vec{j}' \text{ și } \dot{\vec{k}}'=\vec{\omega}\times\vec{k}'. \tag{2.13}$$

Formulele lui Poisson sunt tocmai relațiile cu care se calculează de-

rivatele în raport cu timpul ale versorilor reperului mobil:

$$\dot{\vec{i}}' = \vec{\omega} \times \vec{i}', \quad \dot{\vec{j}}' = \vec{\omega} \times \vec{j}', \quad \dot{\vec{k}}' = \vec{\omega} \times \vec{k}'. \tag{2.14}$$

2.3. Formularea problemei de cinematică. Traiectoria, viteza şi accelerația unui punct al unui solid rigid în mişcare generală

Principala problemă de rezolvat în cinematica mişcării absolute a solidului rigid constă în determinarea legii de mişcare sau a ecuației traiectoriei, a vitezei şi a accelerației unui punct oarecare M al corpului, în raport cu reperul fix.

Se presupun cunoscute poziția reperului R' față de reperul fix R, prin funcțiile (2.2) sau prin funcțiile scalare (2.5), şi coordonatele x', y' şi z' ale punctului arbitrar M față de reperul R', coordonate care sunt constante în timpul mişcării.

Conform datelor problemei, se poate scrie tabela de înmulțire scalară a versorilor celor două repere sau matricea cosinusurilor directoare:

$$\begin{array}{c|ccc} & \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \hline \vec{i}' & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \vec{j}' & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \vec{k}' & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{array} \quad \text{sau } \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

Determinarea ecuației traiectoriei punctului M se face pe baza fig. 2.1 din care rezultă

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}, \tag{2.16}$$

adică

$$\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}', \quad t \in [0, t_1]. \tag{2.17}$$

Relația (2.17) reprezentată ecuația vectorială a traiectoriei sau legea de miş-

care sub formă vectorială a unui punct oarecare M al rigidului.

Viteza punctului arbitrar M se obţine prin derivarea în raport cu timpul a relaţiei (2.17), rezultând

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_{O'} + \dot{\vec{r}}', \tag{2.18}$$

în care $\dot{\vec{r}}_{O'}$ este viteza punctului O'.

$$\vec{v}_{O'} = \dot{\vec{r}}_{O'}. \tag{2.19}$$

Pentru a calcula derivata lui $\vec{r}'$, se scrie acest vector sub formă analitică

$$\vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'. \tag{2.20}$$

Deoarece coordonatele x', y' şi z' sunt constante, vom avea

$$\dot{\vec{r}}' = x'\dot{\vec{i}}' + y'\dot{\vec{j}}' + z'\dot{\vec{k}}'. \tag{2.21}$$

Folosind formulele lui Poisson, se obţine

$$\dot{\vec{r}}' = x'(\vec{\omega}\times\vec{i}') + y'(\vec{\omega}\times\vec{j}') + z'(\vec{\omega}\times\vec{k}') \tag{2.22}$$

sau

$$\dot{\vec{r}}' = \vec{\omega}\times x'\vec{i}' + \vec{\omega}\times y'\vec{j}' + \vec{\omega}\times z'\vec{k}' \tag{2.23}$$

de unde, scoţând vectorul $\vec{\omega}$ în factor, rezultă

$$\dot{\vec{r}}' = \vec{\omega}\times\vec{r}'. \tag{2.24}$$

Viteza punctului arbitrar M are, în consecinţă, formula generală de calcul de forma

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{r}'. \tag{2.25}$$

Vectorii $\vec{v}_{O'}$ şi $\vec{\omega}$ se numesc parametrii cinematici de ordin întâi ai mişcării (p.c.I).

Acceleraţia punctului arbitrar M se obţine derivând, în raport cu timpul, relaţia (2.25), obţinându-se:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' \tag{2.26}$$

în care $\dot{\vec{v}}_{O'}$ reprezintă accelerația polului O'

$$\vec{a}_{O'} = \dot{\vec{v}}_{O'}, \tag{2.27}$$

vectorul $\dot{\vec{\omega}}$ se notează cu $\vec{\varepsilon}$

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}, \tag{2.28}$$

iar $\dot{\vec{r}}'$ este dat de (2.24).

Accelerația punctului arbitrar M se scrie, în final, sub forma

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'). \tag{2.29}$$

Vectorii $\vec{a}_{O'}$ şi $\vec{\varepsilon}$ se numesc parametrii cinematici de ordinul doi ai mişcării (p.c.II).

2.4. Cinematica unor mişcări particulare ale solidului rigid

2.4.1. Cinematica mişcării de translație a solidului rigid

Un solid rigid are o mişcare de translație atunci când un segment AB care uneşte două puncte oarecare din corp rămâne paralel cu el însuşi tot timpul mişcării.

În funcție de traiectoriile descrise de punctele rigidului, se pot deosebi:

a) translații rectilinii cum este, de exemplu, mişcarea acului de la maşina de cusut;

b) translații circulare cum este, de exemplu, mişcarea bielei unui mecanism paralelogram articulat folosit la unele maşini de brodat;

c) alte translații cum este, de exemplu, biela de cuplare a roților

unei locomotive la care fiecare punct descrie o cicloidă scurtată.

Reperul mobil $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ care, aşa cum am văzut, este solidar cu corpul, se alege cu polul O' într-un punct cu mişcare cunoscută sau uşor de determinat. Conform definiţiei mişcării, axele reperului mobil vor rămâne paralele cu ele însele în timpul mişcării, deci şi cu poziţia lor din momentul iniţial. Versorii reperului mobil $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ vor fi, prin urmare, constanţi în mişcarea de translaţie. Pentru a simplifica rezolvarea problemei, axele reperului mobil se aleg, în cea mai mare majoritate a cazurilor, paralele cu ale reperului fix (fig. 2.4), ceea ce face ca ecuaţiile (2.2) să capete forma

$$\vec{r}_{O'} = x_{O'}\vec{i} + y_{O'}\vec{j} + z_{O'}\vec{k} \text{ şi } \begin{cases} \vec{i}' = \vec{i}, \\ \vec{j}' = \vec{j}, \\ \vec{k}' = \vec{k}. \end{cases} \tag{2.30}$$

Parametrii de poziţie în mişcarea de translaţie sunt deci:

$$\begin{aligned} &x_{O'} = x_{O'}(t), \quad y_{O'} = y_{O'}(t), \quad z_{O'} = z_{O'}(t) \\ &\psi = 0, \qquad \varphi = 0, \qquad \theta = 0 \end{aligned} \tag{2.31}$$

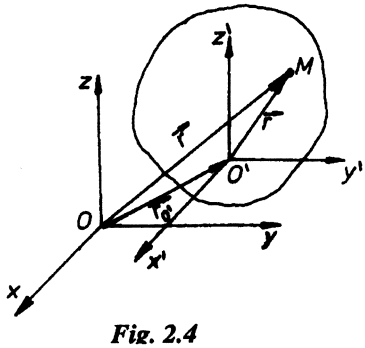

Fig. 2.4

Tabela de înmulţire a versorilor este:

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}'$	1	0	0
$\vec{j}'$	0	1	0
$\vec{k}'$	0	0	1

(2.32)

iar matricea cosinusurilor directoare este matricea unitate.

Într-o translaţie oarecare pot varia cel mult trei parametri independenţi care sunt coordonatele polului O' şi se spune că rigidul are, în acest caz, trei grade de libertate. Într-o translaţie plană pot varia doar doi parametri independenţi şi se spune că rigidul are, în acest caz, două grade de libertate iar într-o translaţie rectilinie poate varia un

parametru şi se sune că rigidul are un grad de libertate.

Fie M un punct din solid determinat de vectorul de poziţie $\vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$ care, în cazul acestui tip de mişcare particulară, este un vector constant. Ecuaţia vectorială a traiectoriei

$$\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}' \tag{2.33}$$

evidenţiază faptul că traiectoria punctului arbitrar M se obţine din traiectoria punctului O' printr-o translaţie geometrică de vector $\vec{r}'$, care este constant, adică traiectoriile tuturor punctelor sunt curbe identice ca formă cu traiectoria polului O' (fig. 2.5).

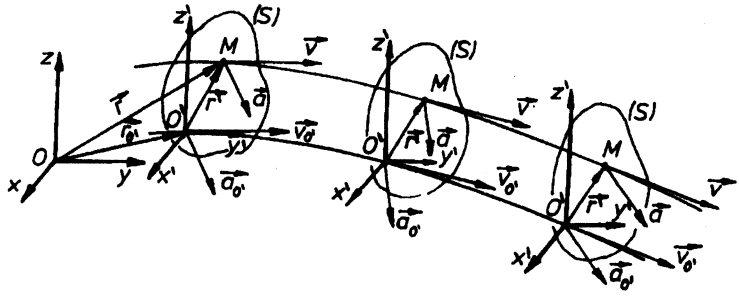

Fig. 2.5

Ecuaţiile parametrice ale traiectoriei se obţin exprimând analitic relaţia (2.33), obţinându-se

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_{O'}\vec{i} + y_{O'}\vec{j} + z_{O'}\vec{k} + x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}', \tag{2.34}$$

de unde, folosind tabela de înmulţire a versorilor (2.32) se deduc ecuaţiile parametrice ale traiectoriei:

$$x = x_{O'} + x', \; y = y_{O'} + y', \; z = z_{O'} + z'. \tag{2.35}$$

Calculul vitezei punctului M se face cu formula (2.25) în care se ţine cont că vectorul $\vec{\omega}$ este nul deoarece componentele sale date de (2.9) conţin derivatele versorilor reperului mobil şi care, în acest caz, sunt nenule, întrucât aceşti versori sunt constanţi (2.30). Rezultă că, în mişcarea de translaţie a rigidului, avem:

$$\vec{\omega}=0,\ t\in[0,t_1], \tag{2.36}$$

şi deci

$$\vec{v}=\vec{v}_{O'},\ t\in[0,t_1], \tag{2.37}$$

adică, în mişcarea de translaţie, toate punctele solidului au în fiecare moment viteze egale cu viteza polului O' (fig. 2.5).

Din (2.36) rezultă că

$$\vec{\varepsilon}=\dot{\vec{\omega}}=0, \tag{2.38}$$

iar acceleraţia punctului M calculabilă cu formula (2.29), devine:

$$\vec{a}=\vec{a}_{O'}, \tag{2.39}$$

deci toate punctele corpului au, în fiecare moment, acceleraţii egale cu acceleraţia polului O' (fig. 2.5).

În concluzie, în mişcarea de translaţie a solidului rigid, toate punctele corpului descriu traiectorii identice ca formă, ele coincizând dacă li se aplică o translaţie geometrică, iar, la un moment t, toate punctele au aceeaşi viteză şi aceeaşi acceleraţie. Vectorii viteză şi acceleraţie ai punctelor solidului rigid în mişcare de translaţie pot fi consideraţi deci vectori liberi. Prin urmare, pentru studiul mişcării corpului, este suficient să se studieze mişcarea unui singur punct al său.

2.4.2. Cinematica mişcării de rotaţie în jurul unei axe fixe a solidului rigid

Un solid rigid are o mişcare de rotaţie în jurul unei axe fixe dacă, în timpul mişcării sale, două puncte ale corpului rămân fixe în spaţiu.

Odată cu cele două puncte, notate O_1 şi O_2, rămâne fixă în spaţiu dreapta determinată de ele, dreaptă care se numeşte axă de rotaţie.

Imobilizarea celor două puncte se realizează cu ajutorul a două articulaţii (fig. 2.6a) sau, în cazul plan, cu una singură (fig. 2.6b). Atunci când

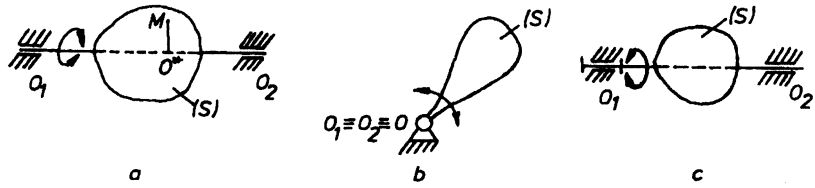

Fig. 2.6

forţele care acţionează asupra corpului pot determina o deplasare în lungul axei de rotaţie, aceasta este împiedicată printr-o construcţie adecvată a uneia din articulaţii (fig. 2.6c).

Ca exemple de mişcări de rotaţie în jurul unei axe fixe se pot da: mişcarea vătalei de la războiul de ţesut, mişcarea pendulei, mişcarea unei roţi dinţate în angrenare etc.

Pentru studiul mişcării se alege un reper fix $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ având axa Oz identică cu axa de rotaţie şi polul în una din articulaţii, de exemplu în O_1 (fig. 2.7), unde se găseşte un lagăr pivot.

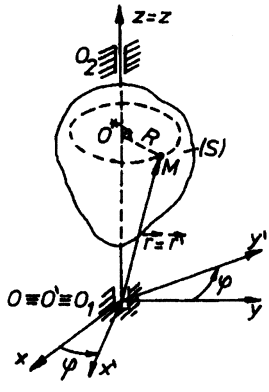

Fig. 2.7

Reperul mobil $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ se alege cel mai convenabil cu polul O' coincizând cu O şi cu axa $O'z'$ coincizând cu axa Oz. Această alegere are avantajul că aduce simplificări importante şi anume:

$$\vec{r}_{O'} = \overrightarrow{OO'} = O, \ \vec{k} = \vec{k}' \qquad (2.40)$$

iar planele xOy şi $x'O'y'$ coincid.

În timpul mişcării corpului variază unghiul dintre axele Ox şi $O'x'$, unghi notat cu $\varphi = \varphi(t)$, care este, de altfel, singurul parametru de poziţie variabil al mişcării. Se spune că rigidul are un singur grad de libertate.

Această mişcare îndeplineşte condiţiile cazului particular prezentat în observaţia din subcapitolul 2.1, astfel că poziţia reperului mobil este dată de

$$\vec{r}_{O'}=0,\ \begin{cases}\vec{i}'=\cos\varphi\vec{i}+\sin\varphi\vec{j},\\ \vec{j}'=-\sin\varphi\vec{i}+\cos\varphi\vec{j},\\ \vec{k}'=\vec{k},\end{cases} \tag{2.41}$$

iar parametrii de poziţie sunt

$$\begin{aligned} &x_{O'}=0,\ y_{O'}=0,\quad z_{O'}=0.\\ &\psi=0,\quad \varphi=\varphi(t),\quad \theta=0.\end{aligned} \tag{2.42}$$

Tabela de înmulţire scalară a versorilor este

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}'$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	0
$\vec{j}'$	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0
$\vec{k}'$	0	0	1

(2.43)

Ecuaţia vectorială a traiectoriei unui punct arbitrar M al rigidului capătă forma

$$\vec{r}=\vec{r}'. \tag{2.44}$$

Ecuaţiile parametrice ale traiectoriei se obţin pe baza expresiei analitice a relaţiei (2.44):

$$x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=x'\vec{i}'+y'\vec{j}'+z'\vec{k}', \tag{2.45}$$

de unde, înmulţind scalar cu versorii $\vec{i}$, $\vec{j}$ şi $\vec{k}$, se obţin proiecţiile pe axele reperului fix, adică ecuaţiile parametrice ale traiectoriei

$$\begin{aligned} x&=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi,\\ y&=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi,\\ z&=z'.\end{aligned} \tag{2.46}$$

Eliminând parametrul φ din (2.46), rezultă

$$\begin{aligned} &x^2+y^2=x'^2+y'^2=R^2,\\ &z=z',\end{aligned} \tag{2.47}$$

în care

$$R=\sqrt{x'^2+y'^2}=|\vec{r}'|\sin(\vec{r}',\vec{k}) \tag{2.48}$$

reprezintă distanţa de la punctul M la axa de rotaţie ($R = |O^*M|$), fig. 2.7).

Ecuaţiile (2.47) sunt ecuaţiile unui cerc de rază R având centrul O^* pe axa Oz, planul cercului fiind paralel cu planul xOy şi situat în planul $z = z' = \text{constant}$.

Deci, în mişcarea de rotaţie în jurul unei axe fixe, toate punctele rigidului, nesituate pe axă, descriu cercuri situate în plane normale la axă, cu centrul pe axă şi de rază egală cu distanţa de la punctele respective la axă.

Pentru deducerea vitezei, se vor calcula mai întâi parametrii cinematici de ordinul întâi ai mişcării, adică vectorii $\vec{v}_{O'}$ şi $\vec{\omega}$. Deoarece $\vec{r}_{O'} = 0$, viteza polului O' este:

$$\vec{v}_{O'} = \dot{\vec{r}}_{O'} = 0. \tag{2.49}$$

Pentru calcularea vectorului $\vec{\omega}$ este nevoie de derivatele versorilor $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ şi $\vec{k}'$, care sunt

$$\begin{aligned} \dot{\vec{i}}' &= -\dot{\varphi}\sin\varphi\vec{i} + \dot{\varphi}\cos\varphi\vec{j} = \dot{\varphi}\vec{j}', \\ \dot{\vec{j}}' &= -\dot{\varphi}\cos\varphi\vec{i} - \dot{\varphi}\sin\varphi\vec{j} = -\dot{\varphi}\vec{i}', \\ \dot{\vec{k}}' &= 0. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Din formulele (2.9), folosind (2.50), rezultă

$$\omega'_x = -\vec{j}' \cdot \dot{\vec{k}}' = 0, \ \omega'_y = \dot{\vec{k}}' \cdot \vec{i}' = 0, \ \omega'_z = \dot{\vec{i}}' \cdot \vec{j}' = \dot{\varphi} \tag{2.51}$$

Prin urmare, parametrii cinematici de ordinul întâi ai mişcării sunt

$$\text{p.c.I} \begin{cases} \vec{v}_{O'} = 0 \\ \vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k} = \dot{\varphi}\vec{k}' \end{cases} \tag{2.52}$$

Vectorul $\vec{\omega}$ are direcţia fixă a axei de rotaţie O_1O_2 şi mărimea scalară $\tilde{\omega} = \dot{\varphi}$, aceeaşi pentru toate punctele rigidului. Vectorul $\vec{\omega}$ este numit vector viteză unghiulară şi indică sensul de rotaţie.

Viteza punctului arbitrar M din rigid se calculează cu formula (2.25)

care capătă forma particulară:

$$\vec{v} = \omega \times \vec{r}' \tag{2.53}$$

şi mai este denumită viteză de rotaţie notată $\vec{v}_{rot}$ (fig. 2.8).

Deoarece traiectoria este un cerc de rază R iar viteza este tangentă la acest cerc, modulul vitezei este

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega}| \cdot R\,, \tag{2.54}$$

fapt care rezultă şi calculând $|\vec{v}|$ dat de (2.53):

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega} \times \vec{r}'| = |\vec{\omega}||\vec{r}'| \cdot \sin(\vec{\omega}, \vec{r}') = |\vec{\omega}| \cdot R \tag{2.55}$$

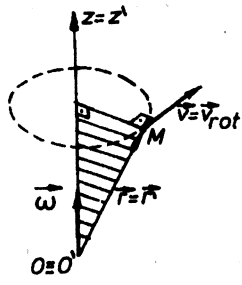

Fig. 2.8

Proiecţiile vitezei pe axele reperului fix se obţin prin derivarea relaţiilor (2.46), rezultând:

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = -x'\dot{\varphi}\sin\varphi - y'\dot{\varphi}\cos\varphi, \\ v_y &= \dot{y} = x'\dot{\varphi}\cos\varphi - y'\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ v_z &= 0. \end{aligned} \tag{2.56}$$

iar proiecţiile vitezei pe axele reperului mobil rezultă din scrierea sub formă analitică a formulei (2.53), obţinându-se:

$$\vec{v} = \vec{v}_{rot} = \vec{\omega} \times \vec{r}' = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = -\dot{\varphi} y' \vec{i}' + \dot{\varphi} x' \vec{j}', \tag{2.57}$$

de unde:

$$v'_x = -\dot{\varphi} y',\ v'_y = \dot{\varphi} x',\ v'_z = 0\,. \tag{2.58}$$

Modulul vitezei se mai poate calcula cu relaţia

$$|\vec{v}| = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z} = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,|\dot{\varphi}| = |\vec{\omega}| \cdot R\,. \tag{2.59}$$

unde $R = \sqrt{x'^2 + y'^2}$.

Distribuţia vitezelor în mişcarea de rotaţie în jurul unei axe fixe are câteva proprietăţi notabile, şi anume:

1. vitezele sunt conţinute în plane normale la axa de rotaţie şi sunt

tangente la cercurile descrise de punctele rigidului. Acest lucru rezultă din faptul că $v_z = v'_z = 0$ şi din faptul că întotdeauna vitezele sunt tangente la traiectorie;

2. singurele puncte care au viteză nulă sunt punctele situate pe axa de rotaţie, deoarece pentru ele, R = 0 deci $|\vec{v}| = 0$;

3. punctele situate pe o dreaptă AB paralelă cu axa de rotaţie Oz au aceeaşi viteză (fig. 2.9). Proprietatea rezultă din faptul că proiecţiile vitezei nu depind de coordonata z' a punctului, ci numai de coordonatele x' şi y' care sunt aceleaşi pentru orice punct situat pe o paralelă la axa Oz;

4. vitezele punctelor unei semidrepte OA perpendiculară pe axa de rotaţie sunt normale la OA şi au vârfurile coliniare.

Pentru a demonstra această proprietate, considerăm un punct D de pe OA (fig. 2.9). Traiectoriile fiind cercuri, vitezele sunt perpendiculare pe raze, deci $\vec{v}_A \perp OA$ şi $\vec{v}_O \perp OD$. Din expresia modulelor vitezelor $|\vec{v}_A| = |\omega| \cdot |OA|$ şi $|\vec{v}_D| = |\omega| \cdot |OD|$, rezultă

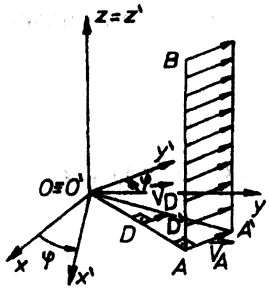

Fig. 2.9

$$\frac{|\vec{v}_A|}{|\vec{v}_D|} = \frac{|OA|}{|OD|}, \qquad (2.60)$$

prin urmare triunghiurile dreptunghice $\Delta ODD'$ şi $\Delta OAA'$ sunt asemenea, ceea ce conduce la egalitatea unghiurilor $\sphericalangle AOA' = \sphericalangle DOD'$, adică la faptul că punctele O, D şi A sunt coliniare.

Pentru a calcula acceleraţia unui punct arbitrar M, se vor exprima mai întâi parametrii cinematici de ordinul doi ai mişcării

$$\text{p.c.II} \begin{cases} \vec{a}_{O'} = \dot{\vec{v}}_{O'} = 0, \\ \vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\varphi}\vec{k} = \ddot{\varphi}\vec{k}'. \end{cases} \qquad (2.61)$$

Vectorul $\vec{\varepsilon}$ are direcţia fixă a axei de rotaţie O_1O_2 şi mărimea sca-

lară $\tilde{\varepsilon} = \ddot{\varphi}$ aceeaşi pentru toate punctele rigidului. El se numeşte vector acceleraţie unghiulară. Dacă vectorii $\vec{\omega}$ şi $\vec{\varepsilon}$ au acelaşi sens, rotaţia este accelerată, iar, în caz contrar, rotaţia este încetinită.

La fel ca la cinematica mişcării circulare a punctului, dacă $\vec{\varepsilon} = 0$, atunci vectorul $\vec{\omega} = \overrightarrow{const.}$, adică $\tilde{\omega} = \dot{\varphi} = const.$, deci $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$, iar rotaţia este uniformă.

Dacă $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_0 = \overrightarrow{const.}$, atunci $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon_0 \frac{t^2}{2}$ şi rotaţia este uniform variată.

Particularizând relaţia generală (2.29), rezultă că acceleraţia punctului arbitrar M este

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{v}_{rot}. \qquad (2.62)$$

Proiecţiile acceleraţiei pe axele reperului fix se obţin derivând relaţiile (2.56), iar proiecţiile pe axele reperului mobil se obţin uşor din expresia analitică a relaţiei (2.62) folosind (2.57), rezultând:

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ 0 & 0 & \ddot{\varphi} \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ -\dot{\varphi}y' & \dot{\varphi}x' & 0 \end{vmatrix} = (-\ddot{\varphi}y' - \dot{\varphi}^2 x')\vec{i}' + (x'\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 y')\vec{j}', \qquad (2.63)$$

de unde:

$$a'_x = -\ddot{\varphi}y' - \dot{\varphi}^2 x', \; a'_y = x'\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 y', \; a'_z = 0. \qquad (2.64)$$

Modulul vectorului acceleraţie este

$$|\vec{a}| = \sqrt{a'^2_x + a'^2_y + a'^2_z} = \sqrt{x'^2 + y'^2}\sqrt{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \qquad (2.65)$$

Relaţia (2.62) arată că vectorul acceleraţie are, la fel ca la mişcarea circulară a punctului, două componente (fig. 2.10):

a) o componentă tangentă la traiectorie, deci coliniară cu viteza, numită componentă tangenţială sau acceleraţie de rotaţie a punctului M în raport cu polul O′ $\vec{a}^t_{MO'} = \vec{a}_{rot} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}'$, având modulul $\left|\vec{a}^t_{MO'}\right| = |\vec{\varepsilon}| \cdot |\vec{r}'| \sin(\vec{\varepsilon}, \vec{r}') = |\vec{\varepsilon}| \cdot R$;

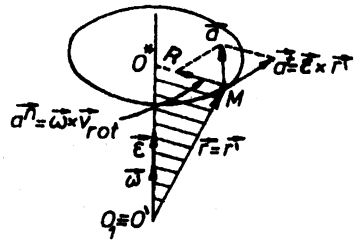

Fig. 2.10

b) o componentă coliniară cu raza cercului numită componentă normală sau accelerație axipetă a punctului M în raport cu polul O′ perpendiculară pe axa de rotație și pe viteză, $\vec{a}^{n}_{MO'} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = \vec{\omega}\times\vec{v}$, având modulul:

$$\left|\vec{a}^{n}_{MO'}\right| = \left|\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')\right| = \left|\vec{\omega}\times\vec{v}\right| = \left|\vec{\omega}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\sin(\vec{\omega},\vec{v}) = \omega^2 R.$$

Distribuția accelerației punctelor unui rigid în mișcare de rotație în jurul unei axe fixe are următoarele proprietăți:

1. accelerațiile sunt conținute în plane normale la axa de rotație, fapt demonstrat de egalitatea cu zero a componentei corespunzătoare acestei axe $a_z = a'_z = 0$;

2. singurele puncte având accelerația nulă sunt cele situate pe axa de rotație, fapt ce rezultă din expresia (2.65) care poate fi nulă numai în cazul $R = 0$ ($\left|\vec{a}\right| = 0 \Leftrightarrow R = 0,\ t \in [0, t_1]$);

3. punctele situate pe o dreaptă AB paralelă cu axa de rotație Oz au aceeași accelerație deoarece proiecțiile accelerației oricărui punct, date de (2.64), nu depind de coordonata z' a punctului (fig. 2.11);

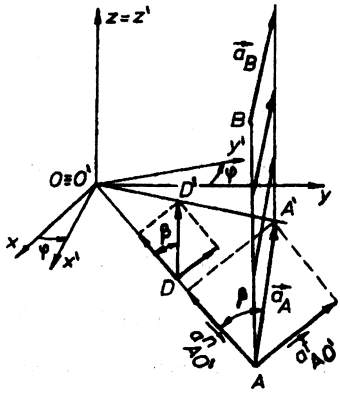

Fig. 2.11

4. accelerațiile punctelor situate pe o semidreaptă OA perpendiculară pe axa de rotație formează un unghi constant cu semidreapta OA iar vârfurile vectorilor accelerație sunt coliniare (fig. 2.11).

Pentru a demonstra proprietatea, se consideră un punct D pe OA. Tangenta unghiului β dintre vectorul accelerație totală și componenta normală este

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{\left|\vec{a}^{\,t}_{AO'}\right|}{\left|\vec{a}^{\,n}_{AO'}\right|} = \frac{\left|\vec{\varepsilon}\times\overrightarrow{OA}\right|}{\left|\vec{\omega}\times\vec{v}_A\right|} = \frac{|\varepsilon|\cdot\left|\overrightarrow{OA}\right|}{\omega^2\cdot\left|\overrightarrow{OA}\right|} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \tag{2.66}$$

şi este aceeaşi pentru orice punct de pe OA. Aceasta înseamnă că vectorii $\vec{a}_A$ şi $\vec{a}_D$ sunt paraleli. Modulii acestor vectori sunt $\left|\vec{a}_A\right| = |OA|\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}$, $\left|\vec{a}_D\right| = |OD|\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}$. Făcând raportul lor, rezultă

$$\frac{\left|\vec{a}_A\right|}{\left|\vec{a}_D\right|} = \frac{|OA|}{|OD|}. \tag{2.67}$$

Rezultă că triunghiul OAA' şi triunghiul ODD' sunt asemenea, deci punctele O, D' şi A' sunt coliniare.

Observaţii

1. Datorită proprietăţilor distribuţiei vitezelor şi acceleraţiilor, este suficient să se studieze mişcarea punctelor dintr-o secţiune a corpului rezultată prin intersecţia sa cu un plan perpendicular pe axa de rotaţie, deoarece tot ce se întâmplă în această secţiune are loc în oricare altă secţiune paralelă cu ea.

2. Expresia analitică a vectorului $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k} = \dot{\varphi}\vec{k}'$ este valabilă pentru orice mişcare a rigidului în care axa $O'z'$ rămâne paralelă cu axa Oz, deoarece, în acest caz, variază numai unghiul $\varphi = \varphi(t)$ iar $\theta = 0$ şi $\psi = 0$ şi se păstrează relaţiile (2.7), (2.43) şi (2.51).

2.4.3. Cinematica mişcării elicoidale a solidului rigid

Un solid rigid execută o mişcare elicoidală dacă două puncte ale sale rămân tot timpul pe o dreaptă fixă din spaţiu.

Această mişcare se mai numeşte şi mişcare de rototranslaţie datorită faptului că, în timp ce corpul se roteşte în jurul unei axe, are loc şi o translaţie în lungul acestei axe. Această axă este numită axă a mişcării elicoidale sau axă de rototranslaţie.

Un exemplu de mişcare elicoidală este mişcarea piuliţei pe şurub.

Pentru studiul mişcării se alege un reper fix cu axa Oz coincizând cu axa de rototranslaţie şi având originea O într-un punct al ei. Reperul mobil se alege cu axa $O'z'$ coincizând cu axa mişcării elicoidale, deci cu axa Oz. Polul O' se mişcă odată cu rigidul în lungul axei Oz (fig. 2.12).

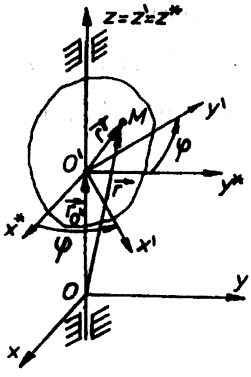

Fig. 2.12

Această mişcare a solidului rigid îndeplineşte condiţiile cazului particular prezentat în observaţia din subcapitolul 2.1, astfel că, ţinând cont şi de situaţia arătată în fig. 2.12, poziţia reperului mobil va fi dată de:

$$\vec{r}_{O'} = z_{O'}\vec{k}, \quad \begin{cases} \vec{i}' = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}, \\ \vec{j}' = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}, \\ \vec{k}' = \vec{k}, \end{cases} \tag{2.68}$$

iar parametrii de poziţie sunt:

$$\begin{aligned} &x_{O'} = 0, \qquad y_{O'} = 0, \qquad z_{O'} = z_{O'}(t), \\ &\psi = 0, \qquad \varphi = \varphi(t), \qquad \theta = 0. \end{aligned} \tag{2.69}$$

Rigidul poate avea cel mult două grade de libertate, atunci când cei doi parametrii de poziţie variabili în timp sunt independenţi.

Tabela de înmulţire a versorilor este tot cea dată de (2.43), iar ecuaţia vectorială a traiectoriei unui punct arbitrar M al corpului este (2.17), care se exprimă analitic astfel:

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = z_{O'}\vec{k} + x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'. \tag{2.70}$$

Ţinând seama de tabela de înmulţire a versorilor (2.43), se obţin ecuaţiile parametrice ale traiectoriei

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi, \\ z &= z_{O'} + z'. \end{aligned} \tag{2.71}$$

Traiectoria punctului arbitrar M este o curbă situată pe suprafaţa

unui cilindru circular drept:

$$x^2+y^2=R^2 \quad (R=\sqrt{x'^2+y'^2}), \tag{2.72}$$

aspectul concret al ei fiind determinat de funcţiile $z_{O'}=z_{O'}(t)$ şi $\varphi=\varphi(t)$. Dacă $z_{O'}=C_1\varphi+C_2$, în care C_1 şi C_2 sunt constante iar $\varphi=\varphi(t)$, atunci traiectoria este o elice cilindrică iar mişcarea se numeşte de şurub.

Având în vedere că sunt respectate condiţiile cerute de observaţia 2 din subcapitolul 2.4.2., vectorul $\vec{\omega}$ are componentele date (2.51), deci parametrii cinematici de ordinul întâi ai mişcării sunt:

$$\text{p.c.I.} \begin{cases} \vec{v}_{O'}=\dot{z}_{O'}\vec{k}, \\ \vec{\omega}=\dot{\varphi}\vec{k}=\dot{\varphi}\vec{k}', \end{cases} \tag{2.73}$$

şi sunt coliniari:

$$\vec{\omega}\times\vec{v}_{O'}=0 \tag{2.74}$$

Viteza unui punct arbitrar M se calculează cu relaţia (2.25) în care componenta $\vec{v}_{O'}=\dot{z}_{O'}\vec{k}$ este coliniară cu axa mişcării de rototranslaţie, iar componenta $\vec{\omega}\times\vec{r}'$ este perpendiculară pe această axă (fig. 2.13).

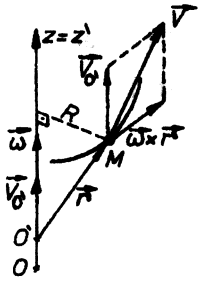

Fig. 2.13

Proiecţiile vitezei pe axele reperului fix se obţin prin derivarea relaţiilor (2.71), iar proiecţiile vitezei pe axele reperului mobil se obţin pe baza expresiei analitice a acesteia:

$$\vec{v}=\dot{z}_{O'}\vec{k}+\begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}=(-y'\dot{\varphi})\vec{i}'+(x'\dot{\varphi})\vec{j}'+\dot{z}_{O'}\vec{k}', \tag{2.75}$$

de unde

$$v'_x=-y'\dot{\varphi},\ v'_y=x'\dot{\varphi},\ v'_z=\dot{z}_{O'}, \tag{2.76}$$

iar modulul este:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\dot{z}_{O'}^2 + (x'^2 + y'^2)\dot{\varphi}^2} = \sqrt{v_{O'}^2 + \omega^2 R^2} \qquad (2.77)$$

Se pot enunţa următoarele proprietăţi ale distribuţiei vitezei punctelor unui rigid în mişcare elicoidală:

1. nu există puncte ale rigidului care să aibă viteză nulă. Într-adevăr, dacă $|\vec{v}| = 0$, ar rezulta din (2.77) că $|\vec{v}_{O'}| = 0$ şi R = 0 sau $|\vec{\omega}| = 0$ ceea ce contrazice ipoteza de producere a mişcării elicoidale, adică existenţa simultană a translaţiei în lungul axei mişcării elicoidale ($\vec{v}_{O'} \neq 0$) şi rotaţiei în jurul acesteia ($\vec{\omega} \neq 0$). Punctele situate pe axa de rototranslaţie au R = 0 şi viteza cea mai mică dintre toate punctele corpului, egală cu viteza polului

$$\vec{v}_{min} = \vec{v}_{O'}, \ \vec{v}_{O'} \parallel \vec{\omega}; \qquad (2.78)$$

2. punctele rigidului situate pe o paralelă cu axa Oz au traiectorii identice ca formă şi viteze egale. Din ecuaţiile parametrice ale traiectoriei (2.71) rezultă că două puncte situate pe o dreaptă paralelă cu axa de rototranslaţie au coordonatele x şi y identice deoarece au aceleaşi valori pentru x' şi y' iar coordonata z diferă printr-o constantă, ceea ce arată că ele descriu traiectorii identice ca formă şi care se pot suprapune printr-o translaţie în lungul axei Oz. Identitatea formei traiectoriilor şi independenţa proiecţiilor vitezei punctelor de cota z' a lor, aşa cum rezultă din (2.76), arată egalitatea vitezei acestor puncte;

3. proiecţia vitezei oricărui punct din solid pe direcţia axei de rototranslaţie este aceeaşi şi egală cu viteza polului. Acest lucru este evidenţiat de faptul că $v_z' = \dot{z}_{O'}$, adică $\vec{v}_z' = \dot{z}_{O'}\vec{k} = \vec{v}_{O'}$.

Pentru determinarea acceleraţiei unui punct arbitrar M, se calculează mai întâi parametrii cinematici de ordinul doi ai mişcării

$$\text{p.c.II} \begin{cases} \vec{a}_{O'} = \dot{\vec{v}}_{O'} = \ddot{z}_{O'}\vec{k}, \\ \vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\varphi}\vec{k} = \ddot{\varphi}\vec{k}', \end{cases} \qquad (2.79)$$

care arată că accelerația polului este coliniară cu accelerația unghiulară.

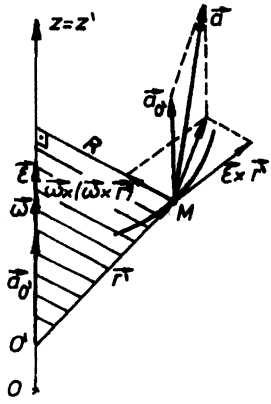

Fig. 2.14

Expresia vectorială generală de calcul a accelerației:

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \qquad (2.80)$$

se scrie analitic astfel:

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' + (\vec{\omega} \cdot \vec{r}')\vec{\omega} - \vec{\omega}^2 \vec{r}' =$$

$$= \ddot{z}_{O'}\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ 0 & 0 & \ddot{\varphi} \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} + (\dot{\varphi} z')\dot{\varphi}\vec{k}' - \qquad (2.81)$$

$$-\dot{\varphi}^2 (x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}') .$$

Rezultă că proiecțiile accelerației pe axele reperului R' sunt

$$a'_x = -y'\ddot{\varphi} - x'\dot{\varphi}^2, \; a'_y = x'\ddot{\varphi} - y'\dot{\varphi}^2, \; a'_z = \ddot{z}_{O'}, \qquad (2.82)$$

iar modulul ei este

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_{O'}^2 + R^2(\varepsilon^2 + \omega^4)} . \qquad (2.83)$$

Cele trei componente ortogonale ale accelerației evidențiate în expresia (2.80) sunt arătate în figura 2.14.

Se pot enunța următoarele proprietăți ale distribuției accelerației punctelor unui rigid în mișcare elicoidală:

1. în general nu există puncte de accelerație nulă decât dacă $\vec{a}_{O'} = 0$, caz în care aceste puncte se află pe axa de rototranslație ($R = 0$). Dacă $\vec{a}_{O'} \neq 0$, atunci punctele de pe axa mișcării elicoidale au accelerație minimă și ea este egală cu accelerația polului:

$$\vec{a}_{min} = \vec{a}_{O'} ; \qquad (2.84)$$

2. punctele situate pe o dreaptă paralelă la axa Oz au accelerații egale. Acest fapt rezultă din identitatea formei traiectoriilor și din indepen-

denţa componentelor accelerației de cota z' a punctului;

3. proiecţia accelerației oricărui punct al corpului pe axa Oz este aceeaşi şi este egală cu accelerația polului, deoarece $\vec{a}'_z = \ddot{z}_{O'}\,\vec{k} = \vec{a}_{O'}$.

În concluzie, distribuţia vitezei şi accelerației punctelor unui rigid în mişcare elicoidală este rezultatul compunerii a două distribuţii:

a) o distribuţie corespunzătoare unei mişcări de translaţie în lungul axei mişcării elicoidale efectuată cu viteza $\vec{v}_{O'}$ şi cu accelerația $\vec{a}_{O'}$;

b) o distribuţie corespunzătoare unei mişcări de rotaţie în jurul axei de rototranslaţie efectuată cu viteza unghiulară $\vec{\omega}$ şi accelerația unghiulară $\vec{\varepsilon}$.

2.4.4. Cinematica mişcării plan-paralele a solidului rigid

Un solid rigid are o mişcare plan-paralelă dacă trei puncte necoliniare ale sale sunt conţinute, în timpul mişcării, într-un plan fix din spaţiu numit plan director.

Se consideră un solid rigid care execută o mişcare plan-paralelă şi A, B, C trei puncte necoliniare ale sale care se mişcă în planul director P (fig. 2.15).

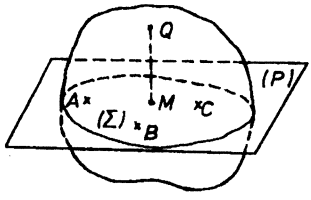

Fig. 2.15

Odată cu cele trei puncte, oricare punct al secţiunii (Σ) rezultată prin intersecţia planului (P) cu corpul se va mişca în acelaşi plan (P).

Pentru a simplifica studiul mişcării, se va arăta că oricare punct al corpului are aceeaşi mişcare cu proiecţia sa pe planul (P). Pentru aceasta, se consideră un punct oarecare Q al rigidului şi fie M proiecţia lui pe planul (P) (fig. 2.15). Deoarece punctul M se mişcă în planul (P), iar segmentul QM este constant şi perpendicular pe planul (P), rezultă că acest segment are o mişcare de translaţie, deci punctele Q şi M au traiectorii identice ca formă şi au viteze şi accelerații egale. Aceasta arată că, pentru a studia mişcarea corpului, este suficient să studiem mişcarea punctelor din secţiunea (Σ).

Ca exemple de corpuri care execută o mişcare plan-paralelă sunt: mişcarea bielei de la mecanismul bielă-manivelă (fig. 2.16a), o roată care se rostogoleşte rămânând mereu în acelaşi plan (fig. 2.16b), o bară care se mişcă într-un plan sprijinindu-se pe două drepte perpendiculare (fig. 2.16c).

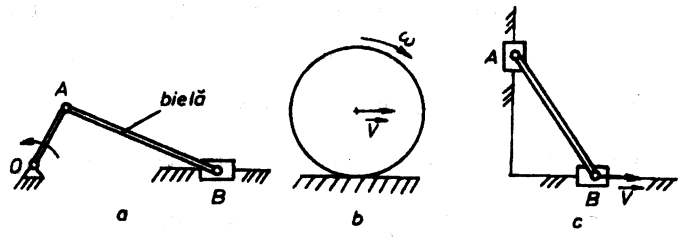

Fig. 2.16

Pentru studierea mişcării, se aleg reperele fix şi mobil astfel încât planele xOy şi $x'O'y'$ să fie în planul director iar polul mobil O' se alege într-un punct cu mişcare cunoscută sau uşor de determinat (fig. 2.17). Axele Oz şi $O'z'$ sunt perpendiculare pe planul director şi au direcţie fixă în spaţiu.

Această mişcare îndeplineşte condiţiile cazului particular prezentat în observaţia din subcapitolul 2.1, astfel că, ţinând cont de faptul că studiul mişcării se face numai în planul director, poziţia reperului mobil va fi dată de:

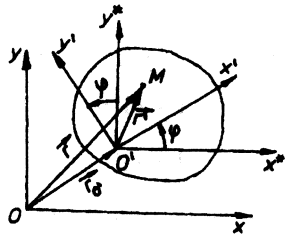

Fig. 2.17

$$\vec{r}_{O'} = x_{O'}\vec{i} + y_{O'}\vec{j}, \quad \begin{cases} \vec{i}' = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}, \\ \vec{j}' = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}, \\ \vec{k}' = \vec{k}, \end{cases} \tag{2.85}$$

iar parametrii de poziţie sunt:

$$\begin{aligned} &x_{O'} = x_{O'}(t), \quad y_{O'} = y_{O'}(t), \quad z_{O'} = 0, \\ &\psi = 0, \qquad \varphi = \varphi(t), \qquad \theta = 0. \end{aligned} \tag{2.86}$$

Deoarece pot exista cel mult trei parametri de poziţie independenţi, rigidul poate avea, în această mişcare, maximum trei grade de libertate. De multe ori coordonatele $x_{O'}$ şi $y_{O'}$ se pot exprima în funcţie de unghiul φ, caz în care rămâne un singur parametru independent iar corpul va avea numai un grad de libertate.

Observaţie

Unghiul φ va fi orientat de la Ox la $O'x'$ în sens trigonometric direct privind dinspre sensul pozitiv al axei $O'z'$.

Ecuaţia vectorială a traiectoriei unui punct $M(x',y',0)$ situat în secţiunea (Σ) este

$$\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}' \tag{2.87}$$

de unde, prin scrierea sub formă analitică a vectorilor, rezultă:

$$x\vec{i} + y\vec{j} = x_{O'}\vec{i} + y_{O'}\vec{j} + x'\vec{i}' + y'\vec{j}', \tag{2.88}$$

relaţie din care, prin proiectare pe axele reperului fix cu ajutorul tabelei de înmulţire a versorilor (2.42), se obţin ecuaţiile parametrice ale traiectoriei:

$$\begin{cases} x = x_{O'} + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = y_{O'} + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{cases} \tag{2.89}$$

Eliminând parametrul t sau φ, se poate obţine ecuaţia analitică a traiectoriei sub forma $F(x,y) = 0$ sau $y = f(x)$.

Pentru calcularea vitezei unui punct arbitrar $M(x',y',0)$ din secţiunea (Σ), se vor determina, mai întâi, parametrii cinematici de ordinul întâi ai mişcării.

Viteza polului O' este:

$$\vec{v}_{O'} = \dot{\vec{r}}_{O'} = \dot{x}_{O'}\vec{i} + \dot{y}_{O'}\vec{j}. \tag{2.90}$$

Datorită faptului că axa $O'z'$ are direcţie fixă în spaţiu şi rămâne paralelă cu axa Oz, vectorul $\vec{\omega}$ are componentele date de (2.51):

$$\omega'_x = 0,\ \omega'_y = 0,\ \omega'_z = \dot{\varphi}. \tag{2.91}$$

Parametrii cinematici de ordinul întâi ai mişcării vor fi:

$$\text{p.c.I.} \begin{cases} \vec{v}_{O'} = \dot{x}_{O'}\vec{i} + \dot{y}_{O'}\vec{j}, \\ \vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k} = \dot{\varphi}\vec{k}', \end{cases} \tag{2.92}$$

ceea ce arată că viteza polului este conţinută în planul director, iar vectorul $\vec{\omega}$ este perpendicular pe planul director, având loc relaţia

$$\vec{v}_{O'}\vec{\omega}=0. \tag{2.93}$$

Formula vectorială de calcul a vitezei rămâne (2.25)

$$\vec{v}=\vec{v}_{O'}+\vec{\omega}\times\vec{r}', \tag{2.94}$$

care are forma

$$\vec{v}=\dot{x}_{O'}\vec{i}+\dot{y}_{O'}\vec{j}+\begin{vmatrix}\vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ x' & y' & 0\end{vmatrix}, \tag{2.95}$$

de unde

$$\vec{v}=\dot{x}_{O'}\vec{i}+\dot{y}_{O'}\vec{j}-y'\dot{\varphi}\vec{i}'+x'\dot{\varphi}\vec{j}'. \tag{2.96}$$

Relaţia (2.96) nu este o expresie analitică a vectorului viteză deoarece conţine versori ai celor două repere diferite. Prin proiectarea acestei relaţii pe axele unuia din repere folosind tabela de înmulţire a versorilor (2.43), se pot obţine componentele corespunzătoare ale vitezei. Astfel, dacă înmulţim scalar (2.96) cu versorii reperului fix, rezultă:

$$\begin{cases} v_x=\vec{v}\cdot\vec{i}=\dot{x}_{O'}-y'\dot{\varphi}\cos\varphi-x'\dot{\varphi}\sin\varphi=\dot{x}, \\ v_y=\vec{v}\cdot\vec{j}=\dot{y}_{O'}+x'\dot{\varphi}\cos\varphi-y'\dot{\varphi}\sin\varphi=\dot{y}, \end{cases} \tag{2.97}$$

cu

$$\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}=\dot{x}\,\vec{i}+\dot{y}\,\vec{j}, \tag{2.98}$$

iar dacă înmulţim scalar (2.96) cu versorii reperului mobil, rezultă:

$$\begin{cases} v'_x=\vec{v}\cdot\vec{i}'=\dot{x}_{O'}\cos\varphi+\dot{y}_{O'}\sin\varphi-y'\dot{\varphi}, \\ v'_y=\vec{v}\cdot\vec{j}'=-\dot{x}_{O'}\sin\varphi+\dot{y}_{O'}\cos\varphi+x'\dot{\varphi}, \end{cases} \tag{2.99}$$

cu

$$\vec{v}=v'_x\,\vec{i}'+v'_y\,\vec{j}'. \tag{2.100}$$

Viteza punctului arbitrar M poate fi interpretată ca suma dintre două componente: viteza polului O' şi viteza $\vec{v}_{rot} = \vec{\omega} \times \vec{r}'$ care mai este denumită viteza lui M în raport cu O' şi se notează $\vec{v}_{MO'}$. Se poate scrie:

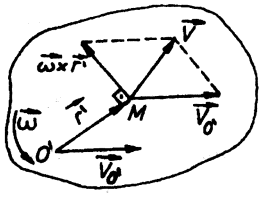

Fig. 2.18

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}_{MO'} \tag{2.101}$$

unde $\vec{v}_{MO'}$ este, ca şi $\vec{v}_{O'}$, în planul secţiunii (Σ) şi este perpendiculară pe $\vec{r}'$ având sensul indicat de vectorul $\vec{\omega}$ (fig. 2.18).

2.4.4.1. Centrul instantaneu de rotaţie

Se pune problema determinării unor puncte din planul secţiunii (Σ) care, la un moment dat t, au viteza nulă. Fie I un astfel de punct, cu

$$\vec{v}_I = 0 \tag{2.102}$$

la un moment t. Relaţia (2.102) conduce la

$$\vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}_I' = 0, \tag{2.103}$$

în care intervine ca necunoscută vectorul de poziţie al punctului I faţă de reperul R', $\vec{r}_I'$. Pentru a-l determina, relaţia (2.103) se înmulţeşte vectorial la stânga cu vectorul $\vec{\omega}$, rezultând

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = 0, \tag{2.104}$$

care capătă forma

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_{O'} + (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_I')\vec{\omega} - \omega^2 \vec{r}_I' = 0. \tag{2.105}$$

Deoarece $\vec{\omega}$ este perpendicular pe $\vec{r}_I'$, produsul lor scalar va fi nul şi relaţia (2.105) devine de forma:

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_{O'} - \vec{\omega}^2 \cdot \vec{r}_I' = 0, \tag{2.106}$$

de unde:

$$\vec{r}_I' = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_{O'}}{\vec{\omega}^2}. \tag{2.107}$$

Vectorul de poziţie al punctului I faţă de reperul fix este:

$$\vec{r}_I = \vec{r}_{O'} + \vec{r}_I' = \vec{r}_{O'} + \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_{O'}}{\vec{\omega}^2}. \tag{2.108}$$

Punctul I din planul secţiunii (Σ), al cărui vector de poziţie faţă de fiecare reper a fost găsit şi are la un moment dat viteză nulă, este unic determinat şi se numeşte centrul instantaneu de rotaţie. Denumirea este justificată de faptul că, dacă la un moment dat un punct al secţiunii joacă rolul lui I, în momentul următor, alt punct al ei va juca rolul lui I şi aşa mai departe, în fiecare moment alt punct al secţiunii joacă rolul lui I, deci este vorba de o proprietate instantanee.

Pot fi puse în evidenţă proprietăţi importante utilizabile în studiul mişcării plan-paralele dacă se consideră, la un moment dat t, ca pol O', punctul din secţiunea (Σ) care joacă rolul lui I. Acest lucru face ca viteza unui alt punct arbitrar A aparţinând secţiunii să aibă expresia

$$\vec{v}_A = \vec{v}_I + \vec{\omega} \times \overrightarrow{IA} \tag{2.109}$$

şi cum $\vec{v}_I = 0$, se obţine

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \overrightarrow{IA}, \tag{2.110}$$

formulă analoagă cu cea de la rotaţia în jurul unei axe fixe. Proprietăţile vitezei deduse acolo rămân valabile, adică

$$\vec{v}_A \perp \overrightarrow{IA} \text{ şi } |\vec{v}_A| = |\vec{\omega}| \cdot |IA|, \ \forall A \in (\Sigma). \tag{2.111}$$

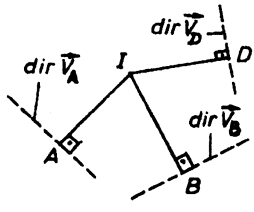

Fig. 2.19

Pe baza relaţiilor (2.111) se pot demonstra două metode grafice utile, care vor fi prezentate în continuare.

1. Dacă se cunosc direcţiile vitezelor a două puncte A şi B ale secţiunii, se poate determina pozi-

ţia punctului I care se va găsi la intersecţia perpendicularelor ridicate în A şi B pe cele două direcţii (fig. 2.19). Odată determinat punctul I, se poate găsi direcţia vitezei unui alt punct D al secţiunii. Aceasta va coincide cu direcţia perpendicularei construite în D pe ID (fig. 2.19).

2. Dacă se cunoaşte viteza unui punct arbitrar A al secţiunii şi direcţia vitezei unui alt punct B al ei, se poate determina viteza unghiulară $\vec{\omega}$, viteza punctului B şi viteza oricărui alt punct D al secţiunii.

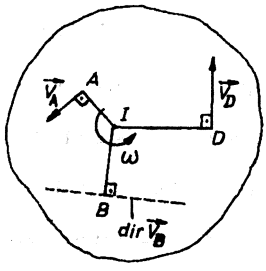

Fig. 2.20

Pentru a determina viteza unghiulară $\vec{\omega}$, se determină mai întâi centrul instantaneu de rotaţie I, care se găseşte la intersecţia perpendicularelor în A pe $\vec{v}_A$ şi în B pe direcţia vitezei punctului B (fig. 2.20). Se calculează apoi modulul vectorului $\vec{\omega}$ utilizând relaţia (2.111):

$$|\vec{\omega}| = \frac{|\vec{v}_A|}{|\overrightarrow{IA}|}. \qquad (2.112)$$

Semnul mărimii algebrice $\tilde{\omega} = \pm|\vec{\omega}|$ se stabileşte comparând sensul de înaintare al burghiului drept atunci când $\vec{v}_A$ roteşte $\overrightarrow{IA}$ în jurul lui I, cu sensul versorului $\vec{k}'$.

Sensul vectorului $\vec{v}_B$ este indicat de sensul în care roteşte $\vec{\omega}$ iar modulul este dat de

$$|\vec{v}_B| = |\vec{\omega}| \cdot |\overrightarrow{IB}|. \qquad (2.113)$$

Pentru a determina viteza punctului D, se uneşte I cu D, iar perpendiculara pe ID va fi tocmai direcţia vitezei $\vec{v}_D$. Sensul este în sensul de rotaţie a lui $\vec{\omega}$ (fig. 2.20), iar modulul este dat de

$$|\vec{v}_D| = |\vec{\omega}| \cdot |\overrightarrow{ID}| = \frac{|\vec{v}_A|}{|\overrightarrow{IA}|} \cdot |\overrightarrow{ID}| \qquad (2.114)$$

Observaţie

Există două situaţii particulare care pot să apară atunci când se doreşte determinarea centrului instantaneu de rotaţie cunoscându-se vitezele a două puncte din corp. Aceste cazuri particulare sunt:

1. Dacă, la un moment dat, vitezele a două puncte A şi B din secţiunea (Σ) sunt paralele, $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$, iar perpendicularele pe aceste viteze sunt distincte (fig. 2.21), atunci distribuţia de viteze în acel moment este ca la o mişcare de translaţie. Toate punctele corpului au aceeaşi viteză, centrul instantaneu de rotaţie fiind considerat la infinit, iar viteza unghiulară este, în acel moment, nulă:

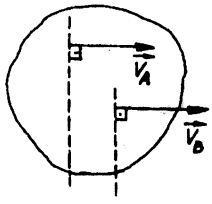

Fig. 2.21

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B, \quad \vec{\omega} = 0. \tag{2.115}$$

2. Dacă, la un moment dat, vitezele a două puncte A şi B din secţiunea (Σ) sunt perpendiculare pe segmentul AB (fig. 2.22), atunci se foloseşte proprietatea că vârfurile vitezelor punctelor segmentului AB sunt coliniare, iar dreapta care le uneşte trece prin centrul instantaneu de rotaţie. Această proprietate este preluată de la mişcarea de rotaţie în jurul unei axe fixe, centrul instantaneu de rotaţie I jucând rolul lui O. Dacă $\vec{v}_A = \vec{v}_B$ şi au acelaşi sens, se ajunge la situaţia de la cazul unu.

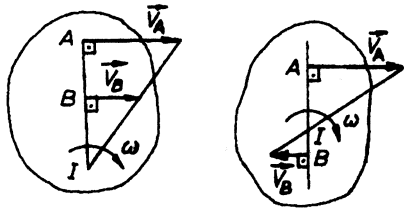

Fig. 2.22

Pentru a exemplifica cele de mai sus se va determina grafic viteza unui punct D al bielei de la mecanismul bielă-manivelă, desenat în fig. 2.23a, pentru trei poziţii ale mecanismului. Mai întâi se consideră o poziţie oarecare a manivelei dată de unghiul θ. Punctul A are viteza $\vec{v}_A$ perpendiculară pe OA şi în sensul dat de viteza unghiulară ω_0 a manivelei OA, cu

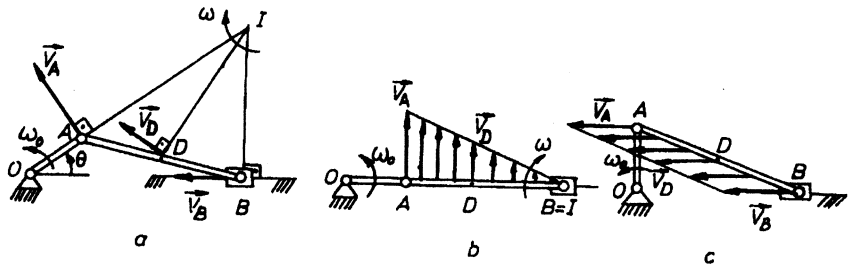

Fig. 2.23

modulul $|\vec{v}_A| = |\vec{\omega}_0| \cdot |OA|$. Punctul B are o traiectorie rectilinie, deci direcţia vitezei sale este de-a lungul lui OB. Centrul instantaneu de rotaţie I al bielei, care execută o mişcare plan-paralelă, se găseşte la intersecţia perpendicularelor duse în A pe $\vec{v}_A$ şi în B pe direcţia vitezei lui B, adică pe OB. Viteza unghiulară $\vec{\omega}$ a bielei are sensul dat de $\vec{v}_A$ şi modulul

$$|\vec{\omega}| = \frac{|\vec{v}_A|}{|IA|} = \frac{|\vec{\omega}_0| \cdot |OA|}{|IA|}. \qquad (2.116)$$

Viteza punctului D este perpendiculară pe ID, are sensul dat de $\vec{\omega}$ şi modulul

$$|\vec{v}_D| = |\vec{\omega}| \cdot |ID|. \qquad (2.117)$$

Viteza punctului B are sensul de la B la O, şi modulul

$$|\vec{v}_B| = |\vec{\omega}| \cdot |IB|. \qquad (2.118)$$

Pentru poziţia dată de unghiul $\theta = 0$ (fig. 2.23b), viteza punctului A este perpendiculară pe OA, deci şi pe AB. Punctul B are, în acest moment, viteză nulă, deci coincide cu centrul instantaneu de rotaţie I, distribuţia vitezelor punctelor bielei AB fiind cea arătată în desen.

Pentru poziţia dată de unghiul $\theta = 90^o$ (fig. 2.23c), punctele A şi B au vitezele paralele şi situaţia din acest moment al mişcării se încadrează în primul caz particular prezentat anterior, prin urmare distribuţia vitezelor punctelor bielei este ca într-o mişcare de translaţie, adică $\vec{\omega} = 0$ şi vitezele tuturor punctelor sunt egale ($\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_D$, oricare ar fi punctul $D \in AB$).

2.4.4.2. Centroidele mişcării plan-paralele a solidului rigid. Axoidele mişcării

Se pune problema determinării coordonatelor punctului I faţă de reperul mobil, folosind expresia analitică a relaţiei (2.107), şi faţă de reperul fix, folosind expresia analitică a relaţiei (2.108). Mai întâi se scrie analitic relaţia (2.107), rezultând

$$x_I'\vec{i}'+y_I'\vec{j}'=\frac{1}{\dot{\varphi}^2}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & \dot{\varphi}\\ \dot{x}_{O'} & \dot{y}_{O'} & 0\end{vmatrix}=-\frac{\dot{y}_{O'}}{\dot{\varphi}}\vec{i}+\frac{\dot{x}_{O'}}{\dot{\varphi}}\vec{j}. \qquad (2.119)$$

Înmulţind scalar relaţia anterioară cu $\vec{i}'$ şi $\vec{j}'$ şi utilizând tabela de înmulţire scalară a versorilor (2.43), se obţin expresiile coordonatelor punctului I faţă de reperul mobil

$$\begin{aligned} x_I' &= \frac{\dot{x}_{O'}}{\dot{\varphi}}\sin\varphi-\frac{\dot{y}_{O'}}{\dot{\varphi}}\cos\varphi,\\ y_I' &= \frac{\dot{x}_{O'}}{\dot{\varphi}}\cos\varphi+\frac{\dot{y}_{O'}}{\dot{\varphi}}\sin\varphi. \end{aligned} \qquad (2.120)$$

Relaţiile anterioare arată că, în timpul mişcării, coordonatele punctului I în raport cu reperul mobil se modifică, ele depinzând de timp în mod direct sau prin intermediul lui φ.

Locul geometric al centrului instantaneu de rotaţie în raport cu reperul mobil este o curbă numită centroidă mobilă sau rostogolitoare. Ecuaţia vectorială a ei este (2.107), iar ecuaţiile parametrice sunt (2.120). Eliminând parametrul t sau φ, se obţine ecuaţia analitică a centroidei mobile

$$f(x_I',y_I')=0. \qquad (2.121)$$

Se scrie acum analitic expresia vectorială (2.108), obţinându-se

$$x_I\vec{i}+y_I\vec{j}=x_{O'}\vec{i}+y_{O'}\vec{j}-\frac{\dot{y}_{O'}}{\dot{\varphi}}\vec{i}+\frac{\dot{x}_{O'}}{\dot{\varphi}}\vec{j}, \qquad (2.122)$$

de unde rezultă expresiile coordonatelor punctului I față de reperul fix

$$x_I = x_{O'} - \frac{\dot{y}_{O'}}{\dot{\varphi}},$$
$$y_I = y_{O'} + \frac{\dot{x}_{O'}}{\dot{\varphi}}. \tag{2.123}$$

Relațiile anterioare arată că și față de reperul fix coordonatele punctului I se modifică în timpul mișcării.

Locul geometric al centrului instantaneu de rotație în raport cu reperul fix este o curbă numită centroidă fixă sau bază. Ecuația vectorială a ei este (2.108), iar ecuațiile parametrice sunt (2.123). Eliminând parametrul t sau φ, se obține ecuația analitică a centroidei fixe

$$F(x_I, y_I) = 0 \tag{2.124}$$

În timpul mișcării plan-paralele, centroidele sunt tangente în fiecare moment în centrul instantaneu de rotație, iar centroida mobilă se rostogolește pur peste centroida fixă, care este imobilă față de reperul fix.

Pentru a demonstra cele afirmate anterior, se pleacă de la relația:

$$\vec{r}_I = \vec{r}_{O'} + \vec{r}_I' \tag{2.125}$$

în care $\vec{r}_I$ și $\vec{r}_I'$ sunt vectori de poziție ai punctului I față de polul fix O și, respectiv, față de polul mobil O'. Se scrie analitic relația (2.125)

$$x_I \vec{i} + y_I \vec{j} = x_{O'} \vec{i} + y_{O'} \vec{j} + x_I' \vec{i}' + y_I' \vec{j}' \tag{2.126}$$

și se derivează în raport cu timpul, obținându-se:

$$\dot{x}_I \vec{i} + \dot{y}_I \vec{j} = \dot{x}_{O'} \vec{i} + \dot{y}_{O'} \vec{j} + \dot{x}_I' \vec{i}' + x_I' \dot{\vec{i}}' + \dot{y}_I' \vec{j}' + y_I' \dot{\vec{j}}' \tag{2.127}$$

Ținând cont de formulele lui Poisson, avem

$$\dot{x}_{O'} \vec{i} + \dot{y}_{O'} \vec{j} + x_I' \dot{\vec{i}}' + y_I' \dot{\vec{j}}' = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}_I' = \vec{v}_I = 0, \tag{2.128}$$

astfel că relația (2.127) devine

$$\dot{x}_I \vec{i} + \dot{y}_I \vec{j} = \dot{x}_I' \vec{i}' + \dot{y}_I' \vec{j}' \tag{2.129}$$

Vectorul din membrul stâng al relației anterioare reprezintă viteza punctului I față de reperul fix R, deci viteza cu care se deplasează el pe bază, prin urmare acest vector este tangent în I la centroida fixă.

Vectorul din membrul drept al relației anterioare reprezintă viteza punctului I față de reperul mobil R', deci viteza cu care se deplasează el pe rostogolitoare, prin urmare este tangent în I la centroida mobilă.

Egalitatea celor doi vectori viteză arată că centroida fixă și centroida mobilă au în punctul I o tangentă comună, adică centroidele sunt tangente în fiecare moment în centrul instantaneu de rotație.

Deoarece modulele vitezelor sunt egale, rezultă că lungimile arcelor de curbă parcurse de I pe fiecare dintre centroide, $ds_1 = \sqrt{\dot{x}_I^2 + \dot{y}_I^2}dt$ și $ds_2 = \sqrt{\dot{x}_I'^2 + \dot{y}_I'^2}dt$, în intervale de timp egale, sunt egale, adică rostogolirea centroidei mobile peste cea fixă este pură, neavând loc nici alunecare și nici patinare.

Odată cu punctul I, toate punctele situate pe o dreaptă (Δ) trecând prin punctul I și perpendiculară pe planul director, deci paralelă cu axele Oz și $O'z'$, au, la momentul considerat, viteză nulă.

Locul geometric al axei (Δ) în raport cu reperul fix este o suprafață cilindrică fixă numită axoidă fixă (fig. 2.24).

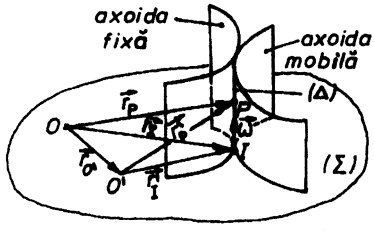

Fig. 2.24

Locul geometric al axei (Δ) în raport cu reperul mobil este o suprafață cilindrică mobilă numită axoidă mobilă (fig. 2.24).

Centroidele sunt curbele de intersecție ale axoidelor cu planul director.

În fiecare moment, cele două axoide care au generatoarea comună axa (Δ), au un plan tangent comun care conține generatoarea, iar axoida mo-

bilă se rostogoleşte pur peste cea fixă.

Dacă se materializează centroidele şi se realizează mişcarea de rostogolire a centroidei mobile peste cea fixă, atunci, fixând corpul de centroida mobilă, aceasta va efectua exact mişcarea plan paralelă iniţială. Acest fapt se poate utiliza la sinteza mecanismelor.

Considerând un punct P de pe axa (Δ), din figura 2.24 se observă că $\overrightarrow{IP} = \lambda\vec{\omega}$, unde λ este un scalar. Ecuaţiile vectoriale ale axoidelor sunt deci

$$\begin{aligned} \vec{r}_P &= \vec{r} = \vec{r}_I + \lambda\vec{\omega}, \\ \vec{r}'_P &= \vec{r}' = \vec{r}'_I + \lambda\vec{\omega}, \end{aligned} \tag{2.130}$$

deci ecuaţia axoidei fixe este

$$\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \frac{\vec{\omega}\times\vec{v}_{O'}}{\omega^2} + \lambda\vec{\omega}, \tag{2.131}$$

iar ecuaţia axoidei mobile este

$$\vec{r}' = \frac{\vec{\omega}\times\vec{v}_{O'}}{\omega^2} + \lambda\vec{\omega}. \tag{2.132}$$

2.4.4.3. Distribuţia acceleraţiilor

Pentru a determina acceleraţia unui punct arbitrar M din secţiunea (Σ), se scriu mai întâi parametrii cinematici de ordinul doi ai mişcării:

$$\text{p.c.II.} \begin{cases} \vec{a}_{O'} = \ddot{x}_{O'}\vec{i} + \ddot{y}_{O'}\vec{j}, \\ \vec{\varepsilon} = \ddot{\varphi}\vec{k} = \ddot{\varphi}\vec{k}'. \end{cases} \tag{2.133}$$

Formula generală de calcul a acceleraţiei unui punct arbitrar este

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{\varepsilon}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = \vec{a}_{O'} + \vec{\varepsilon}\times\vec{r}' + (\vec{\omega}\cdot\vec{r}')\vec{\omega} - \vec{\omega}^2\vec{r}' \tag{2.134}$$

unde, în acest caz particular, are loc relaţia

$$\vec{\omega}\cdot\vec{r}' = 0 \tag{2.135}$$

deoarece aceşti vectori sunt perpendiculari.

În aceste condiţii, pentru calculul acceleraţiei punctului arbitrar M, rezultă forma particulară a relaţiei (2.134):

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' - \vec{\omega}^2 \cdot \vec{r}' . \qquad (2.136)$$

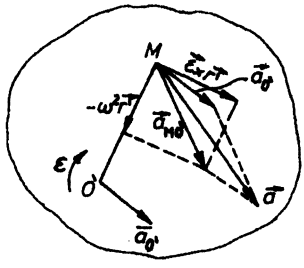

Fig. 2.25

Cele trei componente coplanare ale acceleraţiei sunt figurate în fig. 2.25.

Suma ultimelor două componente este denumită acceleraţia lui M în raport cu O' şi este notată

$$\vec{a}_{MO'} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' - \vec{\omega}^2 \vec{r}' . \qquad (2.137)$$

Ea este formată din acceleraţia tangenţială a lui M în raport cu O':

$$\vec{a}^{\,t}_{MO'} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' \text{ cu } \left|\vec{a}^{\,t}_{MO'}\right| = \left|\vec{\varepsilon}\right| \cdot \left|\vec{r}'\right| , \qquad (2.138)$$

care este perpendiculară în M pe $O'M$ şi are sensul indicat de $\vec{\varepsilon}$, şi din acceleraţia normală a lui M în raport cu O':

$$\vec{a}^{\,n}_{MO'} = -\vec{\omega}^2 \vec{r}' \text{ cu } \left|\vec{a}^{\,n}_{MO'}\right| = \omega^2 \left|\vec{r}'\right| \qquad (2.139)$$

care este coliniară şi de sens opus cu $\vec{r}' = \overrightarrow{O'M}$ (fig. 2.25).

Proiecţiile acceleraţiei punctului M pe axele reperului mobil se obţin din exprimarea analitică a relaţiei (2.136):

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ 0 & 0 & \ddot{\varphi} \\ x' & y' & 0 \end{vmatrix} - \dot{\varphi}^2 (x'\vec{i}' + y'\vec{j}'), \qquad (2.140)$$

care conduce la

$$\begin{aligned} a'_x &= a'_{O'_x} - y'\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 x', \\ a'_y &= a'_{O'_y} + x'\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 y', \end{aligned} \qquad (2.141)$$

în care $a'_{O'_x}$ şi $a'_{O'_y}$ sunt proiecţiile vectorului $\vec{a}_{O'}$ pe axele reperului mobil, având forma

$$\begin{aligned} a'_{O'_x} &= \ddot{x}_{O'}\cos\varphi + \ddot{y}_{O'}\sin\varphi, \\ a'_{O'_y} &= -\ddot{x}_{O'}\sin\varphi + \ddot{y}_{O'}\cos\varphi. \end{aligned} \tag{2.142}$$

2.4.4.4. Polul acceleraţiilor în mişcarea plan-paralelă

La fel ca în cazul vitezelor, se pune problema determinării unor puncte din secţiunea (Σ) având, la un moment dat, acceleraţia nulă. Fie J un astfel de punct cu

$$\vec{a}_J = 0 \tag{2.143}$$

la un moment t.

Condiţia (2.143) revine la

$$\vec{a}_{O'} + \vec{\varepsilon}\times\vec{r}'_J - \omega^2\vec{r}'_J = 0, \tag{2.144}$$

care reprezintă o ecuaţie în necunoscuta $\vec{r}'_J$.

Se înmulţeşte vectorial la stânga relaţia (2.144) cu $\vec{\varepsilon}$, considerat nenul, şi se obţine

$$\vec{\varepsilon}\times\vec{a}_{O'} + (\vec{\varepsilon}\,\vec{r}'_J)\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}^2\,\vec{r}'_J - \vec{\omega}^2(\vec{\varepsilon}\times\vec{r}'_J) = 0, \tag{2.145}$$

în care $\vec{\varepsilon}\cdot\vec{r}'_J = 0$ deoarece cei doi vectori sunt perpendiculari.

Exprimând produsul $\vec{\varepsilon}\times\vec{r}'_J$ din (2.144)

$$\vec{\varepsilon}\times\vec{r}'_J = \omega^2\vec{r}'_J - \vec{a}_{O'} \tag{2.146}$$

şi înlocuindu-l în (2.145), se obţine

$$\vec{r}'_J = \frac{\vec{\omega}^2\cdot\vec{a}_{O'} + \vec{\varepsilon}\times\vec{a}_{O'}}{\varepsilon^2 + \omega^4}, \tag{2.147}$$

relaţie care arată că punctul J există în fiecare moment şi este unic determi-

nat. El se numeşte polul (centrul) acceleraţiilor.

Se disting următoarele două cazuri particulare importante în care determinarea lui J este simplificată:

a. Dacă punctul O' se mişcă rectiliniu şi uniform, adică $\vec{a}_{O'} = 0$, rezultă că $\vec{r}'_J = 0$, ceea ce conduce la faptul că $J \equiv O'$;

b. Dacă $\vec{\varepsilon} = 0$, adică $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 = \overrightarrow{cst}$, polul acceleraţiilor are vectorul de poziţie

$$\vec{r}'_J = \overrightarrow{O'J} = \frac{\vec{a}_{O'}}{\omega^2}, \tag{2.148}$$

ceea ce arată că punctul J se găseşte pe suportul lui $\vec{a}_{O'}$ în sensul indicat de acest vector.

Coordonatele polului acceleraţiilor în raport cu reperul R' se obţin proiectând pe axele acestui reper relaţia (2.147) sau rezolvând în raport cu necunoscutele x'_J şi y'_J sistemul de ecuaţii algebrice (2.141) în care $a'_x = a'_y = a'_{J_x} = a'_{J_y} = 0$. Se obţine

$$x'_J = \frac{\dot{\varphi}^2 a'_{O'_x} - \ddot{\varphi} a'_{O'_y}}{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad y'_J = \frac{\ddot{\varphi} a'_{O'_x} + \dot{\varphi}^2 a'_{O'_y}}{\varepsilon^2 + \omega^4} \tag{2.149}$$

Dacă punctul J este considerat ca pol $(J \equiv O')$, atunci acceleraţia unui punct A, conform (2.134), este dată de

$$\vec{a}_A = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}'_J + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_J) = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{JA} - \vec{\omega}^2 \cdot \overrightarrow{JA}, \tag{2.150}$$

relaţia analoagă cu cea de la rotaţia în jurul unei axe fixe, ceea ce atrage valabilitatea proprietăţilor demonstrate acolo şi pentru această situaţie.

Observaţie

În general, centrul instantaneu de rotaţie este diferit de polul acceleraţiilor $(I \neq J)$ în fiecare moment t şi, de regulă, $\vec{v}_I = 0$ şi $\vec{v}_J \neq 0$ iar $\vec{a}_I \neq 0$ şi $\vec{a}_J = 0$.

2.4.4.5. Aspecte grafice ale distribuţiei vitezelor şi accelerațiilor în mişcarea plan-paralelă

În continuare vor fi prezentate câteva proprietăţi ale distribuţiei vitezelor şi accelerațiilor, care se pot utiliza la determinarea pe cale grafică a vitezei şi accelerației unor puncte ale secţiunii (Σ).

1. Proiecţiile vitezei punctelor unui segment de dreaptă pe acel segment sunt egale (fig. 2.26).

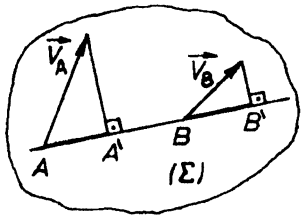

Fig. 2.26

Pentru demonstrarea proprietăţii vom considera două puncte A şi B din planul secţiunii (Σ) şi fie $\vec{u}$ versorul lui $\overrightarrow{AB}$

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}. \qquad (2.151)$$

Se alege ca pol punctul A, ceea ce conduce la următoarea formă a expresiei vitezei punctului B

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}, \qquad (2.152)$$

în care componenta $\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$ se numeşte viteza lui B în raport cu A, se notează $\vec{v}_{BA}$ şi este perpendiculară pe $\overrightarrow{AB}$, având mărimea

$$\left|\vec{v}_{BA}\right| = |\omega| \left|\overrightarrow{AB}\right|. \qquad (2.153)$$

Relaţia (2.152) se scrie acum

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} \qquad (2.154)$$

şi se înmulţeşte scalar cu versorul $\vec{u}$, rezultând

$$\vec{v}_B \cdot \vec{u} = \vec{v}_A \cdot \vec{u} + \vec{v}_{BA} \cdot \vec{u} \qquad (2.155)$$

Deoarece $\vec{v}_{BA} \perp \vec{u}$, rezultă că produsul lor scalar este nul, deci relaţia (2.155) devine

$$\vec{v}_B \cdot \vec{u} = \vec{v}_A \cdot \vec{u} \qquad (2.156)$$

ceea ce demonstrează proprietatea.

Consecinţă

Dacă se cunosc viteza unui punct A şi direcţia vitezei unui punct B, se poate determina, pe cale grafică, viteza oricărui alt punct D al secţiunii (Σ) care nu aparţine lui AB.

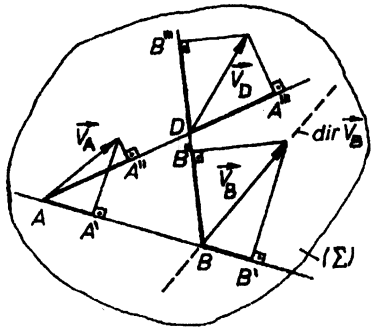

Fig. 2.27

Modul de determinare grafică a vitezei punctului D este arătat în fig. 2.27. Cunoscând $\vec{v}_A$ şi direcţia vitezei lui B se poate determina $\vec{v}_B$ pe baza faptului că proiecţiile acestor viteze pe AB sunt egale ($AA' = BB'$), iar perpendiculara în B' pe BB' intersectează direcţia vitezei punctului B în vârful lui $\vec{v}_B$. Apoi se construiesc cu originea în D proiecţiile lui $\vec{v}_A$ pe AD şi a lui $\vec{v}_B$ pe BD ($AA'' = DA'''$ şi $BB'' = DB'''$), vârful vitezei lui D găsindu-se la intersecţia perpendicularelor construite în A''' pe DA''' şi în B''' pe DB'''.

2. Extremităţile vitezelor punctelor unui segment de dreaptă sunt coliniare.

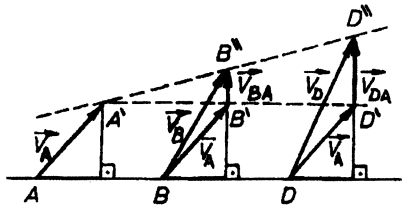

Fig. 2.28

Se consideră trei puncte A, B, D, coliniare (fig. 2.28). Dacă A este luat ca pol, atunci vitezele punctelor B şi D se scriu:

$$\begin{aligned} \vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB} = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}, \\ \vec{v}_D &= \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AD} = \vec{v}_A + \vec{v}_{DA}, \end{aligned} \qquad (2.157)$$

în care

$$\left|\vec{v}_{BA}\right| = |\omega| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|, \vec{v}_{BA} \perp \overrightarrow{AB},$$
$$\left|\vec{v}_{DA}\right| = |\omega| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right|, \vec{v}_{DA} \perp \overrightarrow{AD}. \tag{2.158}$$

Ducând o paralelă prin vârful A' lui $\vec{v}_A$ la AB, se formează două triunghiuri dreptunghice $\Delta A'B'B''$ şi $\Delta A'D'D''$ (fig. 2.28), în care:

$$\frac{\left|\vec{v}_{BA}\right|}{\left|\vec{v}_{DA}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{AD}\right|} \tag{2.159}$$

ceea ce arată că triunghiurile sunt asemenea şi deci punctele A', B'' şi D'' sunt coliniare.

Consecinţă

Dacă se cunosc viteza unui punct A şi direcţia vitezei unui punct B, se poate determina, pe cale grafică, viteza unui punct D situat pe dreapta AB.

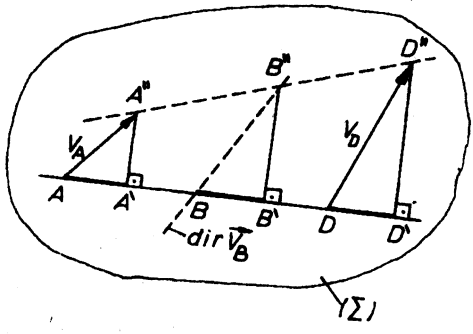

Fig. 2.29

În fig. 2.29 este arătat modul de determinare, pe cale grafică, a vitezei punctului D. Se construieşte mai întâi proiecţia AA' a vitezei punctului A pe AB şi se construiesc apoi segmentele egale $BB' = DD' = AA'$. Extremitatea B'' a lui $\vec{v}_B$ se va găsi la intersecţia dintre direcţia lui $\vec{v}_B$ şi perpendiculara în B' pe AB. Vârful D'' al lui $\vec{v}_D$ se va găsi la intersecţia dintre perpendiculara în D' pe AD şi dreapta $A''B''$.

3. Distribuţia momentană a vitezei punctelor secţiunii (Σ) este cea corespunzătoare unei rotaţii instantanee în jurul centrului instantaneu de rotaţie I.

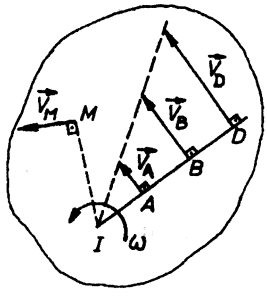

Fig. 2.30

Această proprietate este evidenţiată în fig. 2.30. Vitezele punctelor unui segment de dreaptă care trece prin I sunt perpendiculare pe el şi sunt proporţionale cu distanţa punctului până la centrul instantaneu de rotaţie, ceea ce arată că vârfurile acestor viteze sunt coliniare. Modulul este dat de produsul dintre modulul vitezei unghiulare şi distanţa de la punctul considerat la punctul I.

4. Metoda planului vitezelor

Planul vitezelor este un plan în care sunt construiţi vectorii viteză $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$, $\vec{v}_D$,... ai punctelor A, B, D,... din secţiunea (Σ), consideraţi aplicaţi într-un acelaşi punct comun O.

Se notează vârfurile vectorilor viteză din planul vitezelor cu A', B', D',.... Proprietatea afirmă că, fiind dată figura poligonală ABD... formată din puncte ale secţiunii (Σ) în mişcare plan-paralelă, figura formată din punctele $A'B'D'$... ale planului vitezelor este asemenea cu prima şi rotită faţă de ea cu 90° în sensul indicat de viteza unghiulară $\vec{\omega}$.

Este suficient să se demonstreze proprietatea pentru un triunghi ABD (fig. 2.31a). Se ştie că, dacă A este considerat pol, se poate scrie

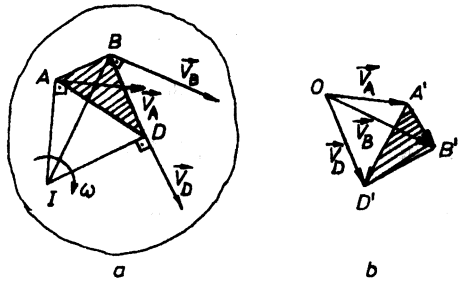

Fig. 2.31

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}, \qquad \vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{v}_{DA}, \tag{2.160}$$

cu

$$\vec{v}_{BA} \perp AB, \ \vec{v}_{DA} \perp AD, \tag{2.161}$$

şi

$$|\vec{v}_{BA}| = |\vec{\omega}||\overrightarrow{AB}|, \ |\vec{v}_{DA}| = |\vec{\omega}||\overrightarrow{AD}|. \tag{2.162}$$

Din planul vitezelor (fig. 2.31b), rezultă că

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \overrightarrow{A'B'},$$
$$\vec{v}_D = \vec{v}_A + \overrightarrow{A'D'}, \qquad (2.163)$$

ceea ce arată, prin comparaţie cu (2.160), că

$$\overrightarrow{A'B'} = \vec{v}_{BA}, \ \overrightarrow{A'D'} = \vec{v}_{DA} \qquad (2.164)$$

Din (2.161) şi (2.164) rezultă că $A'B' \perp AB$ şi că $A'D' \perp AD$ ceea ce implică egalitatea unghiurilor $B\hat{A}D$ şi $B'\hat{A}'D'$. Coroborând aceasta cu (2.162), rezultă asemănarea triunghiurilor $\Delta A'B'D'$ şi ΔABD şi faptul că primul triunghi este rotit faţă de cel de al doilea cu 90^0 în sensul arătat de $\vec{\omega}$.

5. Distribuţia momentană a acceleraţiei punctelor secţiunii (Σ) este cea corespunzătoare unei rotaţii instantanee în jurul polului acceleraţiilor J (fig. 2.32).

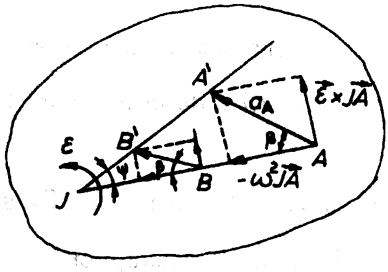

Fig. 2.32

Dacă considerăm ca pol punctul J pentru care $\vec{a}_J = 0$, atunci relaţia (2.29) se scrie:

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}'_J + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_J) \qquad (2.165)$$

este identică cu relaţia (2.62) de la rotaţia în jurul unei axe fixe. Aceasta face ca toate proprietăţile acceleraţiei demonstrate acolo să fie valabile şi pentru momentul considerat în mişcarea plan-paralelă.

Deoarece vectorul $\vec{r}'_J$ este perpendicular pe vectorul $\vec{\varepsilon}$, produsul lor scalar este nul, deci, în urma dezvoltării dublului produs vectorial din (2.165), această relaţie, scrisă pentru un punct oarecare A din secţiunea (Σ), va căpăta forma:

$$\vec{a}_A = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{JA} - \omega^2 \cdot \overrightarrow{JA}. \qquad (2.166)$$

Componenta tangenţială $\vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{JA}$ are direcţia perpendiculară pe $\overrightarrow{JA}$, sensul dat de $\vec{\varepsilon}$ şi modulul $|\vec{\varepsilon}| \cdot |\overrightarrow{JA}|$ iar componenta normală $-\omega^2 \cdot \overrightarrow{JA}$ are

direcţia $\overrightarrow{JA}$, sensul către J şi modulul $\omega^2\left|\overrightarrow{JA}\right|$. Unghiul β dintre componente are tangenta:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}, \tag{2.167}$$

iar modulul acceleraţiei este:

$$\left|\vec{a}_A\right| = \left|\overrightarrow{JA}\right| \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,. \tag{2.168}$$

Punctele J, B' şi A' sunt coliniare iar unghiul ψ sub care se vede acceleraţia din J (fig. 2.32) are tangenta:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{|\varepsilon| \cdot \left|\overrightarrow{JA}\right|}{\left|\overrightarrow{JA}\right| - \omega^2\left|\overrightarrow{JA}\right|} = \frac{|\vec{\varepsilon}|}{1-\omega^2}\,. \tag{2.169}$$

Unghiurile β şi ψ depind de $\vec{\omega}$ şi $\vec{\varepsilon}$ care sunt aceiaşi pentru orice punct al corpului, prin urmare unghiurile nu se modifică de la un punct la altul.

6. Dacă se cunoaşte acceleraţia unui punct A din secţiunea (Σ) şi vectorii $\vec{\omega}$ şi $\vec{\varepsilon}$, se poate determina grafic poziţia polului acceleraţiilor J.

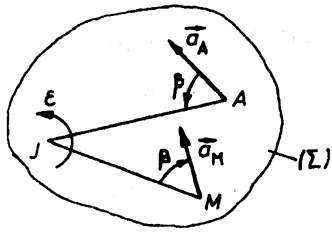

Fig. 2.33

Se calculează mai întâi modulul acceleraţiei punctului A şi apoi modulul distanţei de la punctul A la polul J:

$$\left|\overrightarrow{JA}\right| = \frac{\left|\vec{a}_A\right|}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}, \tag{2.170}$$

precum şi mărimea unghiului β cu formula (2.167). Distanţa $\left|\overrightarrow{JA}\right|$ va fi măsurată din A pe direcţia şi în sensul rezultat prin rotirea vectorului $\vec{a}_A$ în jurul lui A cu unghiul β în sensul dat de $\tilde{\varepsilon}$ (fig. 2.33).

Pentru a determina acceleraţia unui alt punct M din secţiunea (Σ) cunoscând poziţia polului acceleraţiilor J şi vectorii $\vec{\omega}$ şi $\vec{\varepsilon}$, se uneşte J cu

M şi se roteşte JM în jurul lui M cu unghiul β în sens opus sensului indicat de $\tilde{\varepsilon}$ pentru a obţine direcţia şi sensul vectorului $\vec{a}_M$ (fig. 2.33). Modulul lui $\vec{a}_M$ va fi:

$$|\vec{a}_M| = |\overrightarrow{JM}|\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,. \qquad (2.171)$$

7. Metoda planului accelerațiilor

Planul accelerațiilor este un plan în care sunt construiţi vectorii accelerație $\vec{a}_A$, $\vec{a}_B$, $\vec{a}_D$,... ai punctelor A, B, D,... din secţiunea (Σ), consideraţi aplicaţi într-un acelaşi punct comun O.

Se notează vârfurile vectorilor accelerație din planul accelerațiilor cu $A', B', D', \ldots$. Proprietatea afirmă că, fiind dată figura poligonală ABD... formată din puncte ale secţiunii (Σ) în mişcare plan-paralelă, figura formată din punctele $A'B'D'$... ale planului accelerațiilor este asemenea cu prima şi rotită faţă de ea cu unghiul $\pi - \beta$ în sensul indicat de accelerația unghiulară $\tilde{\varepsilon}$ (unghiul β este cel definit de relația (2.157).

Este suficient să se demonstreze proprietatea pentru un triunghi ABD (fig. 2.34a). Se ştie că, dacă A este considerat pol, accelerațiile punctelor B şi D se scriu conform (2.136) şi (2.137) sub forma:

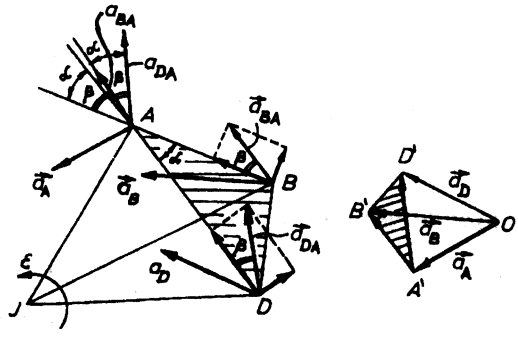

Fig. 2.34

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}, \qquad \vec{a}_D = \vec{a}_A + \vec{a}_{DA}, \qquad (2.172)$$

în care

$$|\vec{a}_{BA}| = |\overrightarrow{AB}|\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \qquad |\vec{a}_{DA}| = |\overrightarrow{AD}|\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (2.173)$$

Din planul accelerațiilor (fig. 2.34b), rezultă relațiile vectoriale:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \overrightarrow{A'B'} \text{ şi } \vec{a}_D = \vec{a}_A + \overrightarrow{A'D'}. \tag{2.174}$$

Comparând relațiile (2.172) cu (2.174), rezultă

$$\vec{a}_{BA} = \overrightarrow{A'B'} \text{ şi } \vec{a}_{DA} = \overrightarrow{A'D'}. \tag{2.175}$$

Făcând raportul relațiilor din (2.173) şi ținând cont de relațiile (2.175), se obține:

$$\frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{AD}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{A'B'}\right|}{\left|\overrightarrow{A'D'}\right|}. \tag{2.176}$$

Construim în A componenta $\vec{a}_{BA}$ care face unghiul β cu AB şi componenta $\vec{a}_{DA}$ care face unghiul β cu AD (fig. 2.34a). Notând cu α unghiul dintre $\vec{a}_{BA}$ şi $\vec{a}_{DA}$, acesta este egal cu unghiul dintre BA şi DA conform fig. 2.34a. Acest fapt, împreună cu relația (2.176), conduce la rezultatul că triunghiul ABD şi triunghiul $A'B'D'$ sunt asemenea.

Pe de altă parte, pentru ca AB să cadă peste $\vec{a}_{BA}$ trebuie rotit în jurul lui A în sensul lui $\tilde{\varepsilon}$ cu unghiul $\pi-\beta$, iar pentru ca AD să cadă peste $\vec{a}_{DA}$ trebuie rotit în jurul lui A în sensul lui $\tilde{\varepsilon}$ tot cu unghiul $\pi-\beta$. Acest lucru arată că triunghiul $A'B'D'$ este rotit față de triunghiul ABD cu unghiul $\pi-\beta$.

2.4.5. Cinematica mişcării solidului rigid cu un punct fix

Un solid rigid are o mişcare cu un punct fix când un punct al său rămâne fixat în tot timpul mişcării. Fixarea punctului se realizează de obicei cu ajutorul unei articulații sferice (fig. 2.35), dar şi cu ajutorul crucii cardanice folosită mai ales la dispozitive giroscopice. Reperele se aleg cu polii O şi O' coincizând cu punctul fix al articulației.

Poziția reperului R' față de reperul fix este dată de

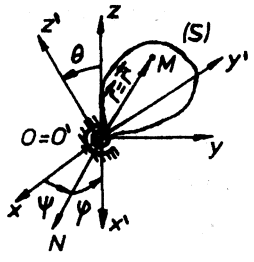

Fig. 2.35

$$\vec{r}_{O'}=0,\quad \begin{cases}\vec{i}'=\alpha_{11}\vec{i}+\alpha_{12}\vec{j}+\alpha_{13}\vec{k},\\ \vec{j}'=\alpha_{21}\vec{i}+\alpha_{22}\vec{j}+\alpha_{23}\vec{k},\\ \vec{k}'=\alpha_{31}\vec{i}+\alpha_{32}\vec{j}+\alpha_{33}\vec{k},\end{cases} \tag{2.177}$$

iar parametrii de poziţie sunt

$$\begin{array}{lll} x_{O'}=0, & y_{O'}=0, & z_{O'}=0,\\ \psi=\psi(t), & \varphi=\varphi(t), & \theta=\theta(t). \end{array} \tag{2.178}$$

În timpul mişcării corpului sunt variabili maximum trei parametrii de poziţie independenţi care sunt, de exemplu, cele trei unghiuri ale lui Euler, ceea ce arată că rigidul are cel mult trei grade de libertate.

Tabela de înmulţire scalară a versorilor celor două repere este:

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}'$	α_{11}	α_{12}	α_{13}
$\vec{j}'$	α_{21}	α_{22}	α_{23}
$\vec{k}'$	α_{31}	α_{32}	α_{33}

(2.179)

În continuare, va fi prezentat modul de deducere a expresiilor cosinusurilor directoare în funcţie de unghiurile lui Euler.

Pentru a obţine aceste expresii vor fi introduse două repere auxiliare. Primul este reperul $R_1(O,\vec{n}_1,\vec{n}_2,\vec{n}_3)$ (fig. 2.36), cu axele $ON_1=ON$ (linia nodurilor) având versorul $\vec{n}_1$, $ON_3=Oz$ cu versorul $\vec{n}_3=\vec{k}$ şi ON_2 situată în planul xOy cu versorul $\vec{n}_2$ completând triedrul $\vec{n}_1,\vec{n}_2,\vec{n}_3$. Dacă se roteşte reperul fix în jurul axei Oz cu unghiul ψ în sens direct, axele sale se vor suprapune peste axele reperului R_1. Din fig. 2.36 rezultă:

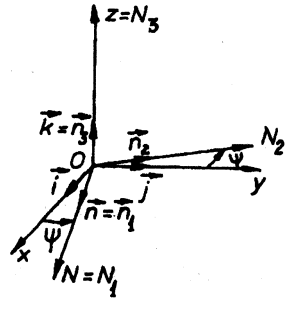

Fig. 2.36

$$\begin{aligned}\vec{i}&=\cos\psi\,\vec{n}_1-\sin\psi\,\vec{n}_2,\\ \vec{j}&=\sin\psi\,\vec{n}_1+\cos\psi\,\vec{n}_2,\\ \vec{k}&=\vec{n}_3,\end{aligned} \tag{2.180}$$

de unde se deduce tabela de înmulţire a versorilor şi matricea corespunzătoare:

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{n}_1$	$\cos\psi$	$\sin\psi$	0
$\vec{n}_2$	$-\sin\psi$	$\cos\psi$	0
$\vec{n}_3$	0	0	1

$$\alpha_\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.181)$$

Al doilea reper auxiliar $R_1'(O,\vec{n}_1',\vec{n}_2',\vec{n}_3')$ (fig. 2.37) are axele $ON_1' = ON$ (linia nodurilor) cu versorul $\vec{n}_1' = \vec{n}_1 = \vec{n}$, $ON_3' = Oz'$ cu versorul $\vec{n}_3' = \vec{k}'$ şi ON_2' situată în planul $x'O'y'$ cu versorul $\vec{n}_2'$ completând triedrul $\vec{n}_1', \vec{n}_2', \vec{n}_3'$. Dacă se roteşte reperul R_1' în jurul axei ON_3' cu unghiul φ în sens direct, axele sale se vor suprapune peste axele reperului R'. Din fig. 2.37 rezultă:

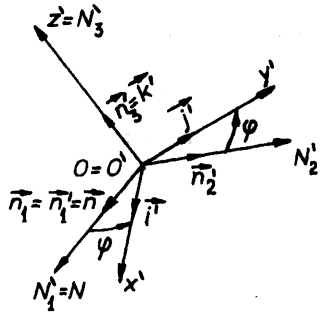

Fig. 2.37

$$\begin{aligned} \vec{i}' &= \cos\varphi\,\vec{n}_1' + \sin\varphi\,\vec{n}_2', \\ \vec{j}' &= -\sin\varphi\,\vec{n}_1' + \cos\varphi\,\vec{n}_2', \\ \vec{k}' &= \vec{n}_3', \end{aligned} \qquad (2.182)$$

de unde se deduce tabela de înmulţire scalară a versorilor şi matricea corespunzătoare:

	$\vec{n}_1'$	$\vec{n}_2'$	$\vec{n}_3'$
$\vec{i}'$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	0
$\vec{j}'$	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0
$\vec{k}'$	0	0	1

$$\alpha_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.183)$$

Analizând modul de alegere a reperelor R_1 şi R_1', se observă că axele ON_2, ON_2', $ON_3 = Oz$ şi $ON_3' = Oz'$ sunt perpendiculare în O pe axa ON deci sunt coplanare (fig. 2.38). Dacă se roteşte reperul R_1 în jurul axei

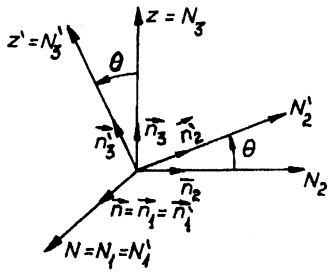

Fig. 2.38

ON cu unghiul θ în sens direct, axele sale se vor suprapune peste axele reperului R_1'. Din fig. 2.38 rezultă

$$\begin{aligned} \vec{n}_1' &= \vec{n}_1, \\ \vec{n}_2' &= \cos\theta\,\vec{n}_2 + \sin\theta\,\vec{n}_3, \\ \vec{n}_3' &= -\sin\theta\,\vec{n}_2 + \cos\theta\,\vec{n}_3, \end{aligned} \tag{2.184}$$

de unde se deduce tabela de înmulţire a versorilor şi matricea corespunzătoare:

	$\vec{n}_1$	$\vec{n}_2$	$\vec{n}_3$
$\vec{n}_1'$	1	0	0
$\vec{n}_2'$	0	$\cos\theta$	$\sin\theta$
$\vec{n}_3'$	0	$-\sin\theta$	$\cos\theta$

$$\alpha_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{2.185}$$

Ţinând cont de (2.181), (2.183) şi (2.185) se pot deduce expresiile cosinusurilor directoare în funcţie de unghiurile lui Euler:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \vec{i}'\cdot\vec{i} = (\cos\varphi\,\vec{n}_1' + \sin\varphi\,\vec{n}_2')(\cos\psi\,\vec{n}_1 - \sin\psi\,\vec{n}_2) = \\ &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta, \\ \alpha_{12} &= \vec{i}'\cdot\vec{j} = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta, \\ \alpha_{13} &= \vec{i}'\cdot\vec{k} = \sin\varphi\sin\theta, \\ \alpha_{21} &= \vec{j}'\cdot\vec{i} = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta, \\ \alpha_{22} &= \vec{j}'\cdot\vec{j} = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta, \\ \alpha_{23} &= \vec{j}'\cdot\vec{k} = \cos\varphi\sin\theta, \\ \alpha_{31} &= \vec{k}'\cdot\vec{i} = \sin\psi\sin\theta, \\ \alpha_{32} &= \vec{k}'\cdot\vec{j} = -\cos\psi\sin\theta, \\ \alpha_{33} &= \vec{k}'\cdot\vec{k} = \cos\theta. \end{aligned} \tag{2.186}$$

Acest rezultat se poate obţine folosind relaţia matricială

$$\alpha = \alpha_\varphi \alpha_\theta \alpha_\psi . \tag{2.187}$$

Se consideră acum un punct arbitrar $M(x', y', z')$ din rigid. Ecuaţia vectorială a traiectoriei, ţinând cont de (2.177), are forma particulară:

$$\vec{r} = \vec{r}' . \tag{2.188}$$

Pentru a obţine ecuaţiile parametrice ale traiectoriei, se scrie analitic relaţia (2.188)

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}' , \tag{2.189}$$

care se proiectează pe axele reperului fix prin înmulţire scalară cu versorii acestor axe, rezultând

$$\begin{aligned} x &= \alpha_{11} x' + \alpha_{21} y' + \alpha_{31} z', \\ y &= \alpha_{12} x' + \alpha_{22} y' + \alpha_{32} z', \\ z &= \alpha_{13} x' + \alpha_{23} y' + \alpha_{33} z'. \end{aligned} \tag{2.190}$$

Ţinând cont de relaţiile (2.4), ecuaţiile parametrice ale traiectoriei (2.190) conduc la ecuaţia

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2 = \text{cst.} \tag{2.191}$$

care arată că traiectoria punctului M este o curbă situată pe o sferă de rază egală cu distanţa de la punct la polul O.

Pentru a obţine relaţia de calcul a vitezei unui punct arbitrar M al rigidului, se observă că polul O' coincide cu punctul fix al corpului, deci

$$\vec{v}_{O'} = 0 , \tag{2.192}$$

condiţie în care formula (2.25) capătă forma particulară:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{\omega} \times \vec{r} . \tag{2.193}$$

Forma expresiei (2.193) este aceeaşi cu cea de la rotaţia în jurul unei axe fixe, cu deosebirea că vectorul $\vec{\omega}$ are cu totul altă expresie, el având direcţie variabilă în spaţiu.

Pentru deducerea expresiei vectorului $\vec{\omega}$ corespunzătoare mişcării solidului cu punct fix, se consideră că, pe rând, variază câte un unghi al lui

Euler, timp în care celelalte două unghiuri rămân constante. Avem astfel următoarele posibilităţi:

a. $\psi = \psi(t)$, $\varphi = cst.$, $\theta = cst.$, situaţie în care rigidul se roteşte în jurul axei fixe Oz cu viteza unghiulară $\vec{\omega}_1 = \dot{\psi}\vec{k}$, viteza punctului arbitrar M fiind $\vec{v}_1 = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}'$;

b. $\psi = cst.$, $\varphi = \varphi(t)$, $\theta = cst.$, situaţie în care rigidul se roteşte în jurul axei Oz', fixă în acest caz, cu viteza unghiulară $\vec{\omega}_2 = \dot{\varphi}\vec{k}'$, viteza punctului arbitrar M fiind $\vec{v}_2 = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}'$;

c. $\psi = cst.$, $\varphi = cst.$, $\theta = \theta(t)$, situaţie în care rigidul se roteşte în jurul axei ON fixă în acest caz, cu viteza unghiulară $\vec{\omega}_3 = \dot{\theta}\vec{n}$, viteza punctului arbitrar M fiind $\vec{v}_3 = \vec{\omega}_3 \times \vec{r}'$.

Dacă considerăm acum că toate cele trei unghiuri ale lui Euler variază simultan, atunci viteza punctului M va fi suma celor trei viteze datorate variaţiei fiecărui unghi în parte, rezultând:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}' + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}' + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}' = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3) \times \vec{r}' \quad (2.194)$$

Comparând relaţia (2.193) cu (2.194), rezultă că vectorul $\vec{\omega}$ are expresia:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 = \dot{\psi}\vec{k} + \dot{\varphi}\vec{k}' + \dot{\theta}\vec{n}. \quad (2.195)$$

Vectorul $\vec{\omega}$ dat de (2.195) se numeşte vector viteză unghiulară instantanee, el caracterizând o rotaţie instantanee. Relaţia (2.195) nu este însă o expresie analitică.

Înmulţind scalar vectorul $\vec{\omega}$ cu versorii axelor reperului mobil, se obţin proiecţiile ω'_x, ω'_y şi ω'_z ale vitezei unghiulare pe axele acestui reper. Pentru ω'_x avem

$$\omega'_x = \vec{\omega}\cdot\vec{i}' = (\dot{\psi}\vec{k} + \dot{\varphi}\vec{k}' + \dot{\theta}\vec{n})\cdot\vec{i}' = \dot{\psi}(\vec{k}\cdot\vec{i}') + \dot{\varphi}(\vec{k}'\cdot\vec{i}') + \dot{\theta}(\vec{n}\cdot\vec{i}') = \\ = \dot{\psi}\alpha_{13} + \dot{\theta}\cos\varphi \tag{2.196}$$

Procedând analog pentru celelalte două proiecţii, se obţin în final relaţiile:

$$\begin{aligned} \omega'_x &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \\ \omega'_y &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \\ \omega'_z &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}, \end{aligned} \tag{2.197}$$

utilizându-se relaţiile (2.186) şi relaţiile:

$$\begin{aligned} \vec{i}'\cdot\vec{n} &= \cos(\vec{i}',\vec{n}) = \cos\varphi, \\ \vec{j}'\cdot\vec{n} &= \cos(\vec{j}',\vec{n}) = -\sin\varphi, \\ \vec{k}'\cdot\vec{n} &= \cos\frac{\pi}{2} = 0, \end{aligned} \tag{2.198}$$

deduse pe baza desenului din fig. 2.37.

Înmulţind scalar vectorul $\vec{\omega}$ cu versorii axelor reperului fix, se obţin proiecţiile ω_x, ω_y şi ω_z ale vitezei unghiulare pe axele acestui reper, cu expresiile:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi, \\ \omega_y &= -\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta + \dot{\theta}\sin\psi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta, \end{aligned} \tag{2.199}$$

pentru obţinerea cărora s-au folosit relaţiile (2.186) şi relaţiile:

$$\begin{aligned} \vec{n}\cdot\vec{i} &= \cos(\vec{n},\vec{i}) = \cos\psi, \\ \vec{n}\cdot\vec{j} &= \cos(\vec{n},\vec{j}) = \sin\psi, \\ \vec{n}\cdot\vec{k} &= 0, \end{aligned} \tag{2.200}$$

deduse utilizând desenul din fig. 2.36.

Acum se poate scrie expresia analitică a vectorului $\vec{\omega}$ în raport cu cele două repere:

$$\vec{\omega} = \omega'_x \vec{i}' + \omega'_y \vec{j}' + \omega'_z \vec{k}', \tag{2.201}$$

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}. \tag{2.202}$$

Scriind analitic relaţiile (2.193), se pot deduce proiecţiile vitezei punctului arbitrar M pe cele două repere. Avem astfel

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_y z - \omega_z y)\vec{i} + (\omega_z x - \omega_x z)\vec{j} + \\ + (\omega_x y - \omega_y x)\vec{k} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}, \tag{2.203}$$

şi

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}' = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ \omega'_x & \omega'_y & \omega'_z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = (\omega'_y z' - \omega'_z y')\vec{i}' + (\omega'_z x' - \omega'_x z')\vec{j}' + \\ + (\omega'_x y' - \omega'_y x')\vec{k}' = v'_x \vec{i}' + v'_y \vec{j}' + v'_z \vec{k}', \tag{2.204}$$

Tot din relaţia (2.193) se deduce că în fiecare moment viteza unui punct M al rigidului este tangentă la un cerc care este situat într-un plan perpendicular pe vectorul $\vec{\omega}$ şi trece prin acel punct M. Cercul are centrul în piciorul perpendicularei coborâtă din M pe suportul din acel moment al vectorului $\vec{\omega}$ (fig. 2.39). Se observă, din aceeaşi relaţie, că punctele care au viteză nulă la un moment dat sunt punctele situate pe suportul vectorului $\vec{\omega}$, deoarece $\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}' = 0$ implică $\vec{r} = \lambda\vec{\omega}$ sau $\vec{r}' = \lambda\vec{\omega}$.

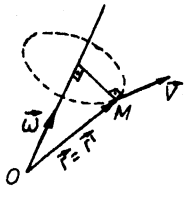

Fig. 2.39

Rezultă că există în orice moment o dreaptă (Δ) ale cărei puncte au viteză zero. Ea este denumită axă instantanee de rotaţie şi este tocmai suportul vectorului $\vec{\omega}$ aplicat în polul O. Deoarece vectorul $\vec{\omega}$ îşi modifică orientarea în timp, rezultă că şi axa instantanee de rotaţie îşi modifică orientarea.

Locul geometric al axei instantanee de rotaţie în raport cu reperul fix se numeşte axoidă fixă şi este o suprafaţă conică cu vârful în O denumită şi conul herpolodic a cărei ecuaţie este $\vec{r} = \lambda\vec{\omega}$ sau

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z} \tag{2.205}$$

Locul geometric al axei instantanee de rotaţie în raport cu reperul mobil se numeşte axoidă mobilă şi este o suprafaţă conică cu vârful în O denumită şi conul polodic a cărei ecuaţie este $\vec{r}' = \lambda\vec{\omega}$ sau

$$\frac{x'}{\omega'_x} = \frac{y'}{\omega'_y} = \frac{z'}{\omega'_z} \tag{2.206}$$

Se poate arăta că cele două axoide sunt tangente în fiecare moment de-a lungul generatoarei comune (Δ), iar conul polodic se rostogoleşte pur peste conul herpolodic.

Observaţie

Rotaţiile finite, efectuate într-un interval de timp finit, nu sunt comutative, în schimb se poate arăta că rotaţiile elementare sunt comutative. Vom demonstra că două rotaţii elementare $\vec{\omega}_1 dt$ şi $\vec{\omega}_2 dt$ sunt comutative şi pot fi înlocuite cu o rotaţie elementară unică $(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2)dt$.

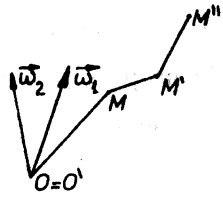

Fig. 2.40

Fie un punct arbitrar M al unui solid rigid cu punct fix. În intervalul de timp dt, acest punct are o deplasare elementară (fig. 2.40) dată de

$$d\vec{r} = \overrightarrow{MM'} = (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}')dt = (\vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{OM})dt. \tag{2.207}$$

Apoi, din poziţia M', punctul are o nouă deplasare elementară $\overrightarrow{M'M''}$ de forma

$$\overrightarrow{M'M''} = (\vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{OM'})dt. \tag{2.208}$$

Deoarece

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'}, \tag{2.209}$$

avem

$$\overrightarrow{M'M''} = [\vec{\omega}_2 \times (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'})]dt = (\vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{OM})dt + \\ + [\vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{OM})](dt)^2 \tag{2.210}$$

Deplasarea totală a punctului M este

$$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''}, \tag{2.211}$$

care, dacă facem înlocuirile corespunzătoare, devine:

$$\overrightarrow{MM''} = (\vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{OM})dt + (\vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{OM})dt + [\vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{OM})](dt)^2 \tag{2.212}$$

Presupunem acum că deplasările elementare se fac în ordine inversă şi că, în urma efectuării lor, punctul M ajunge într-o poziţie M_1. Procedând analog ca mai sus, se obţine deplasarea totală:

$$\overrightarrow{MM_1} = (\vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{OM})dt + (\vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{OM})dt + [\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{OM})](dt)^2. \tag{2.213}$$

Cele două rotaţii sunt comutative dacă neglijăm ultimul termen care conţine $(dt)^2$, caz în care:

$$\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{MM''} = [(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \overrightarrow{OM}]dt, \tag{2.214}$$

ceea ce este echivalent cu o deplasare elementară datorată unei viteze unghiulare $\vec{\omega}$ de forma:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2, \tag{2.215}$$

iar deplasarea elementară a punctului M se scrie

$$\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{MM''} = (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OM})dt, \tag{2.216}$$

deci rotaţiile elementare sunt comutative.

Pentru calcularea acceleraţiei unui punct arbitrar M al corpului, se vor deduce, mai întâi, parametrii cinematici de ordinul doi ai mişcării. Deoarece $\vec{v}_{O'} = 0$ se obţine $\vec{a}_{O'} = 0$. Expresia analitică a vectorului $\vec{\varepsilon}$ în raport

cu reperul fix se obţine foarte simplu

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}_x \vec{i} + \dot{\omega}_y \vec{j} + \dot{\omega}_z \vec{k} \tag{2.217}$$

Pentru a calcula expresia analitică a vectorului $\vec{\varepsilon}$ în raport cu reperul mobil, se folosesc formulele lui Poisson:

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}'_x \vec{i}' + \omega'_x (\vec{\omega} \times \vec{i}') + \dot{\omega}'_y \vec{j}' + \omega'_y (\vec{\omega} \times \vec{j}') + \dot{\omega}'_z \vec{k}' + \omega'_z (\vec{\omega} \times \vec{k}'), \tag{2.218}$$

de unde

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\omega}'_x \vec{i}' + \dot{\omega}'_y \vec{j}' + \dot{\omega}'_z \vec{k}' + \vec{\omega} \times (\omega'_x \vec{i}' + \omega'_y \vec{j}' + \omega'_z \vec{k}') . \tag{2.219}$$

Deoarece ultimul termen este nul fiind de forma $\vec{\omega} \times \vec{\omega}$, se obţine

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\omega}'_x \vec{i}' + \dot{\omega}'_y \vec{j}' + \dot{\omega}'_z \vec{k}' . \tag{2.220}$$

Vectorul $\vec{\varepsilon}$ se numeşte vector acceleraţie unghiulară instantanee deoarece îşi modifică direcţia în fiecare moment.

Parametrii cinematici de ordinul doi ai mişcării sunt deci

$$\text{p.c.II} \begin{cases} \vec{a}_{O'} = 0 \\ \vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}_x \vec{i} + \dot{\omega}_y \vec{j} + \dot{\omega}_z \vec{k} = \dot{\omega}'_x \vec{i}' + \dot{\omega}'_y \vec{j}' + \dot{\omega}'_z \vec{k}' \end{cases} \tag{2.221}$$

Formula generală de calcul a acceleraţiei unui punct arbitrar al corpului capătă forma particulară:

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') . \tag{2.222}$$

Pentru a obţine expresia analitică a acceleraţiei în raport cu reperul mobil se scrie relaţia (2.222) sub forma

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' + (\vec{\omega} \cdot \vec{r}')\vec{\omega} - \vec{\omega}^2 \cdot \vec{r}' , \tag{2.223}$$

şi încă

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ \dot{\omega}'_x & \dot{\omega}'_y & \dot{\omega}'_z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} + (\omega'_x x' + \omega'_y y' + \omega'_z z')(\omega'_x \vec{i}' + \omega'_y \vec{j}' + \omega'_z \vec{k}') - \\ - (\omega'^2_x + \omega'^2_y + \omega'^2_z)(x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}'). \tag{2.224}$$

Din (2.224) se deduc componentele accelerației în raport cu reperul mobil:

$$
\begin{aligned}
a'_x &= \dot{\omega}'_y z' - \dot{\omega}'_z y' + (\omega'_x x' + \omega'_y y' + \omega'_z z')\omega'_x - (\omega'^2_x + \omega'^2_y + \omega'^2_z)x', \\
a'_y &= \dot{\omega}'_z x' - \dot{\omega}'_x z' + (\omega'_x x' + \omega'_y y' + \omega'_z z')\omega'_y - (\omega'^2_x + \omega'^2_y + \omega'^2_z)y', \\
a'_z &= \dot{\omega}'_x y' - \dot{\omega}'_y x' + (\omega'_x x' + \omega'_y y' + \omega'_z z')\omega'_z - (\omega'^2_x + \omega'^2_y + \omega'^2_z)z',
\end{aligned}
\tag{2.225}
$$

cu

$$\vec{a} = a'_x \vec{i}' + a'_y \vec{j}' + a'_z \vec{k}'. \tag{2.226}$$

Se pot obține analog componentele accelerației în raport cu reperul fix.

Dacă se pune problema punctelor cu accelerație nulă, atunci considerând $a'_x = a'_y = a'_z = 0$, rezultă din relațiile (2.225) un sistem omogen cu determinantul Δ de forma:

$$\Delta = -(\vec{\omega} \times \vec{\varepsilon})^2 \tag{2.227}$$

care, în general, este nenul. Acest fapt arată că singurul punct cu accelerație nulă este punctul fix al rigidului în care se află și polul O.

2.5. Cinematica mișcării generale a solidului rigid

Se consideră un solid (S) în mișcare generală față de un reper fix $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, adică un solid la care variază toți cei șase parametri de poziție independenți. Această mișcare se mai numește mișcare de rototranslație instantanee. Dacă se solidarizează de rigidul (S) un reper $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$, atunci poziția acestui reper, deci și a solidului de care este legat, poate fi precizată dacă sunt cunoscuți, de exemplu, următorii șase parametri de poziție independenți:

$$
\begin{aligned}
x_{O'} &= x_{O'}(t), & \varphi &= \varphi(t), \\
y_{O'} &= y_{O'}(t), & \theta &= \theta(t), \\
z_{O'} &= z_{O'}(t), & \psi &= \psi(t),
\end{aligned}
\tag{2.228}
$$

unde $x_{O'}$, $y_{O'}$, $z_{O'}$ sunt coordonatele polului O', iar ψ, φ şi θ sunt unghiurile lui Euler (fig. 2.41). Relaţiile (2.228) constituie ecuaţiile de mişcare ale solidului (S).

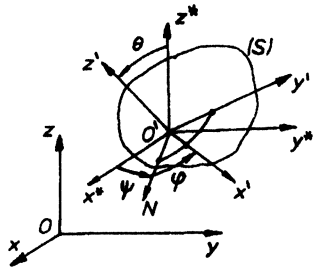

Fig. 2.41

Mişcările particulare studiate se obţin din mişcarea generală prin considerarea constantă a unora din cei 6 parametri din (2.228). De exemplu, dacă unghiurile lui Euler sunt constante, atunci solidul (S) va efectua o translaţie, sau, dacă coordonatele polului O' sunt constante, atunci solidul (S) va executa o mişcare de rigid cu punct fix.

Poziţia reperului R' este dată, sub formă vectorială, de vectorii

$$
\vec{r}_{O'} = x_{O'}\vec{i} + y_{O'}\vec{j} + z_{O'}\vec{k}, \quad
\begin{cases}
\vec{i}' = \alpha_{11}\vec{i} + \alpha_{12}\vec{j} + \alpha_{13}\vec{k}, \\
\vec{j}' = \alpha_{21}\vec{i} + \alpha_{22}\vec{j} + \alpha_{23}\vec{k}, \\
\vec{k}' = \alpha_{31}\vec{i} + \alpha_{32}\vec{j} + \alpha_{33}\vec{k},
\end{cases}
\tag{2.229}
$$

unde $\alpha_{ij}(i, j = 1,2,3)$ sunt cosinusurile directoare şi se exprimă în funcţie de unghiurile lui Euler cu ajutorul relaţiilor (2.186).

Tabela de înmulţire a versorilor şi matricea cosinusurilor directoare vor avea forma

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}'$	α_{11}	α_{12}	α_{13}
$\vec{j}'$	α_{21}	α_{22}	α_{23}
$\vec{k}'$	α_{31}	α_{32}	α_{33}

$$
\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}
\tag{2.230}
$$

Rezolvarea problemei de cinematică înseamnă determinarea traiec-

toriei, vitezei şi acceleraţiei unui punct arbitrar M al solidului (S) ale cărui coordonate x', y' şi z' sunt constante cunoscute, cu condiţia cunoaşterii şi a ecuaţiilor de mişcare (2.228).

Traiectoria punctului m are forma vectorială (2.17)

$$\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}', \tag{2.231}$$

care, prin proiectare pe axele reperului fix, conduce la următoarele ecuaţii parametrice

$$\begin{aligned} x &= x_{O'} + x'\alpha_{11} + y'\alpha_{21} + z'\alpha_{31}, \\ y &= y_{O'} + x'\alpha_{12} + y'\alpha_{22} + z'\alpha_{32}, \\ z &= z_{O'} + x'\alpha_{13} + y'\alpha_{23} + z'\alpha_{33}. \end{aligned} \tag{2.232}$$

Pentru calculul vitezei punctului M, se determină, mai întâi, parametrii cinematici de ordinul I ai mişcării

$$\text{p.c.I} \quad \begin{cases} \vec{v}_{O'} = \dot{\vec{r}}_{O'} = \dot{x}_{O'}\vec{i} + \dot{y}_{O'}\vec{j} + \dot{z}_{O'}\vec{k}, \\ \vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{k} + \dot{\varphi}\vec{k}' + \dot{\theta}\vec{n}, \end{cases} \tag{2.233}$$

ale căror proiecţii pe axele reperului mobil R' sunt

$$\begin{aligned} v'_{O'_x} &= \vec{v}_{O'} \cdot \vec{i}' = \dot{x}_{O'}\alpha_{11} + \dot{y}_{O'}\alpha_{12} + \dot{z}_{O'}\alpha_{13}, \\ v'_{O'_y} &= \vec{v}_{O'} \cdot \vec{j}' = \dot{x}_{O'}\alpha_{21} + \dot{y}_{O'}\alpha_{22} + \dot{z}_{O'}\alpha_{23}, \\ v'_{O'_z} &= \vec{v}_{O'} \cdot \vec{k}' = \dot{x}_{O'}\alpha_{31} + \dot{y}_{O'}\alpha_{32} + \dot{z}_{O'}\alpha_{33}, \end{aligned} \tag{2.234}$$

respectiv

$$\begin{aligned} \omega'_x &= \vec{\omega} \cdot \vec{i}' = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \\ \omega'_y &= \vec{\omega} \cdot \vec{j}' = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \\ \omega'_z &= \vec{\omega} \cdot \vec{k}' = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}, \end{aligned} \tag{2.235}$$

Expresia vectorială a vitezei punctului M, dată de (2.25), este

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \tag{2.236}$$

ale cărei proiecţii pe axele reperului mobil sunt

$$v'_x = v_{O'_x} + z'\omega'_y - y'\omega'_z,$$
$$v'_y = v_{O'_y} + x'\omega'_z - z'\omega'_x, \qquad (2.237)$$
$$v'_z = v_{O'_z} + y'\omega'_x - x'\omega'_y.$$

Observaţii

1. Vectorul $\vec{v}_{O'}$ este un vector legat, adică depinde de situarea în spaţiu a punctului O' ales ca pol. Acest lucru reiese din faptul că, dacă alegem un alt pol O_1, atunci viteza acestuia este

$$\vec{v}_{O_1} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'O_1} \qquad (2.238)$$

ceea ce arată că, în general, $\vec{v}_{O_1} \neq \vec{v}_{O'}$. Cele două viteze sunt egale numai dacă vectorul $\overrightarrow{O'O_1}$ are direcţia vectorului $\vec{\omega}$.

2. Vectorul $\vec{\omega}$ este independent de alegerea originii axelor reperului mobil R', adică are aceeaşi valoare în orice pol.

Dacă se consideră un pol O' în care parametrii cinematici de ordinul întâi sunt $\vec{v}_{O'}$ şi $\vec{\omega}$ şi apoi un alt pol O_1 în care parametrii cinematici de ordinul întâi sunt $\vec{v}_{O_1}$ şi $\vec{\omega}_1$, atunci viteza unui punct arbitrar M se exprimă cu relaţia

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M}, \qquad (2.239)$$

sau cu relaţia

$$\vec{v} = \vec{v}_{O_1} + \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{O_1M}. \qquad (2.240)$$

Deoarece cele două expresii definesc aceeaşi viteză, are loc egalitatea:

$$\vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M} = \vec{v}_{O_1} + \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{O_1M}. \qquad (2.241)$$

Substituind vectorul $\vec{v}_{O_1}$ cu expresia (2.238), se obţine

$$\vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'O_1} + \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{O_1M} \qquad (2.242)$$

Efectuând simplificările corespunzătoare şi ţinând cont că, din fig. 2.42, rezultă relaţia

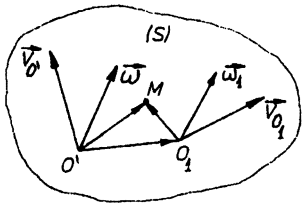

Fig. 2.42

$$\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O_1} + \overrightarrow{O_1M}, \qquad (2.243)$$

din (2.242) se obţine

$$(\vec{\omega} - \vec{\omega}_1) \times \overrightarrow{O_1M} = 0, \qquad (2.244)$$

relaţia valabilă **oricare** ar fi punctul M al solidului (S). În aceste condiţii, se poate concluziona că

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1, \qquad (2.245)$$

adică vectorul $\vec{\omega}$ este independent de alegerea originii axelor reperului R', deci este vector liber.

3. În mişcarea generală există trei invarianţi la schimbarea polului din punctul O' în alt punct O_1. Aceştia sunt:

a. invariantul vectorial

$$\vec{I}_1 = \vec{\omega}, \qquad (2.246)$$

a cărui dependenţă faţă de poziţia polului a fost arătată anterior;

b. invariantul scalar

$$I_2 = \vec{v}_{O'} \cdot \vec{\omega}, \qquad (2.247)$$

a cărui independenţă de alegerea polului rezultă imediat prin înmulţirea scalară, cu vectorul $\vec{\omega}$, a termenilor relaţiei (2.238)

$$\vec{v}_{O_1} \cdot \vec{\omega} = (\vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'O_1})\vec{\omega} = \vec{v}_{O'} \cdot \vec{\omega}; \qquad (2.248)$$

c. invariantul scalar

$$I_3 = \frac{\vec{v}_{O'} \cdot \vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} = \frac{I_2}{|I_1|}, \qquad (2.249)$$

care reprezintă proiecţia vitezei polului O' pe direcţia vectorului $\vec{\omega} \neq 0$, ob-

ţinut prin înmulţirea scalară a vectorului $\vec{v}_{O'}$ cu versorul $\vec{u}$ al vectorului $\vec{\omega}$

$$\vec{u} = \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}. \tag{2.250}$$

Se observă o analogie cu invarianţii care apar în cazul axei centrale a unui sistem de vectori paraleli [7], rolul vectorului rezultant fiind jucat acum de vectorul $\vec{\omega}$, iar cel al vectorului moment rezultant de vectorul $\vec{v}_{O'}$.

4. În cazul în care vectorul $\vec{\omega}$ este nenul, există o dreaptă numită axă instantanee de rototranslaţie sau axă centrală a mişcării, ale cărei puncte P luate ca pol au proprietăţile:

- viteza acestor puncte P este minimă

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{min} = \frac{\vec{\omega}\cdot\vec{v}_{O'}}{|\vec{\omega}|^2}\vec{\omega}; \tag{2.251}$$

- vectorii $\vec{v}_P$ şi $\vec{\omega}$ sunt coliniari, adică are loc relaţia

$$\vec{\omega}\times\vec{v}_P = 0. \tag{2.252}$$

Pentru a demonstra aceste afirmaţii, se pleacă de la observaţia 1, care arată că viteza unui pol arbitrar O' depinde de poziţia acestuia. Dacă se proiectează vectorul $\vec{v}_{O'}$ pe o direcţie coliniară cu $\vec{\omega}$ şi pe o direcţie perpendiculară pe $\vec{\omega}$, se constată că, aşa cum se afirmă în observaţia 3 punctul c, componenta coliniară este constantă şi are mărimea algebrică egală cu I_3 şi, prin urmare, numai componenta normală se va modifica la schimbarea poziţiei polului O'. Acest lucru conduce la ideea de a căuta un pol P în care componenta vitezei acestuia normală la vectorul $\vec{\omega}$ să fie nulă, deci viteza $\vec{v}_P$ să fie coliniară cu $\vec{\omega}$ şi să aibă mărimea algebrică (2.249). Vectorul $\vec{v}_P$ se obţine înmulţind scalarul I_3 cu versorul lui $\vec{\omega}$ dat de (2.250), rezultând expresia

$$\vec{v}_P = \frac{\vec{v}_{O'} \cdot \vec{\omega}}{|\vec{\omega}|^2} \cdot \vec{\omega} \tag{2.253}$$

Întrucât I_3 este un invariant, nu se pot găsi puncte cu viteza mai mică decât aceasta, deci $\vec{v}_P = \vec{v}_{min}$.

Dacă un astfel de punct P există, atunci conform observaţiei 1, există o infinitate de astfel de puncte situate pe o dreaptă ce trece prin punctul P şi are direcţia lui $\vec{\omega}$.

Pentru a găsi vectorul de poziţie $\vec{r}' = \overrightarrow{O'P}$ al unui punct P care are proprietăţile precizate mai sus, se înlocuieşte în (2.252) relaţia de calcul a vectorului $\vec{v}_P$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'P}. \tag{2.254}$$

Se obţine relaţia

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{O'P}) = 0, \tag{2.255}$$

de unde, după dezvoltarea dublului produs vectorial, rezultă

$$\overrightarrow{O'P} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_{O'}}{\omega^2} + \frac{\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{O'P}}{\omega^2} \vec{\omega}. \tag{2.256}$$

Notând cu $\vec{r}'$ vectorul $\overrightarrow{O'P}$ şi cu λ scalarul $\frac{\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{O'P}}{\omega^2}$, se obţine

$$\vec{r}' = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_{O'}}{\omega^2} + \lambda \vec{\omega}, \tag{2.257}$$

care reprezintă ecuaţia unei drepte ce trece prin punctul P_0 dat de

$$\vec{r}'_{P_0} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_{O'}}{\omega^2} \tag{2.258}$$

şi este paralelă cu vectorul $\vec{\omega}$. Această dreaptă este locul geometric al punctelor P a căror viteză este paralelă cu vectorul $\vec{\omega}$ şi are valoarea minimă

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{min} = \frac{\vec{v}_{O'} \cdot \vec{\omega}}{|\vec{\omega}|^2} \vec{\omega}. \qquad (2.259)$$

Dreapta este numită axă centrală a mişcării (prin analogie cu axa centrală a unui sistem de vectori alunecători) sau axa instantanee de rototranslaţie (prin analogie cu situaţia de la mişcarea elicoidală a rigidului unde există o astfel de axă ale cărei puncte au viteza coliniară cu $\vec{\omega}$, numai că acolo ea este fixă).

Dacă $\vec{\omega} \cdot \vec{v}_{O'} = 0$, adică $\vec{v}_{O'}$ este perpendicular pe $\vec{\omega}$ sau $\vec{v}_{O'}$ este zero, atunci $\vec{v}_{min} = 0$ şi nu se mai poate vorbi de coliniaritatea între $\vec{\omega}$ şi $\vec{v}_P$. În acest caz, axa centrală a mişcării se defineşte ca fiind locul geometric al punctelor de viteză minimă egală cu zero. Această situaţie apare la unele mişcări particulare cum sunt mişcarea plan-paralelă şi mişcarea de solid cu punct fix.

În raport cu reperul fix, ecuaţia axei centrale a mişcării este

$$\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_{O'}}{\omega^2} + \lambda \vec{\omega}. \qquad (2.260)$$

Relaţiile (2.257) şi (2.260) arată că, în timpul mişcării, axa centrală a acesteia se mişcă atât faţă de reperul fix cât şi faţă de reperul mobil.

Locul geometric al axei instantanee de rototranslaţie în raport cu reperul mobil este o suprafaţă riglată numită axoidă mobilă. Ecuaţia ei vectorială este dată de (2.257).

Locul geometric al axei instantanee de rototranslaţie în raport cu reperul fix este o suprafaţă riglată numită axoidă fixă. Ecuaţia ei vectorială este dată de (2.260).

Se poate demonstra că cele două axoide care au generatoarea comună axa instantanee de rototranslaţie sunt tangente iar axoida mobilă are o mişcare de alunecare în lungul generatoarei comune concomitent cu o mişcare de rostogolire în jurul aceleiaşi generatoare.

În cazul celor cinci mişcări particulare studiate, care se pot obţine din mişcarea generală pentru anumite valori ale parametrilor de poziţie, problema axei centrale a mişcării îmbracă următoarele forme:

- în cazul mişcării de translaţie a solidului rigid, parametrii cinematici de ordinul întâi sunt $\vec{v}_{O'} \neq 0$ şi $\vec{\omega} = 0$, deci nu se poate pune problema punctelor de viteză minimă;
- în cazul mişcări de rotaţie în jurul unei axe fixe, parametrii cinematici de ordinul întâi sunt $\vec{v}_{O'} = 0$, $\vec{\omega} \neq 0$ cu vectorul $\vec{\omega}$ de direcţie fixă, prin urmare rezultă $\vec{v}_{min} = 0$ iar axa centrală a mişcării este fixă şi coincide cu axa de rotaţie, axoidele degenerând în două drepte confundate.
- în cazul mişcării elicoidale, parametrii cinematici de ordinul întâi ai mişcării sunt $\vec{v}_{O'} \neq 0$, $\vec{\omega} \neq 0$ şi sunt coliniari, deci $\vec{\omega} \times \vec{v}_{O'} = 0$. Axa centrală a mişcării este axa mişcării elicoidale, adică axa fixă de rototranslaţie, iar axoidele sunt degenerate în două drepte coliniare cu axa de rototranslaţie, axoida mobilă având o mişcare de alunecare în lungul axoidei fixe;
- în cazul mişcării plan-paralele, parametrii cinematici de ordinul întâi ai mişcării sunt $\vec{v}_{O'} \neq 0$, $\vec{\omega} \neq 0$, iar între ei există o relaţie de perpendicularitate, deci $\vec{\omega} \cdot \vec{v}_{O'} = 0$. Viteza minimă este $\vec{v}_{min} = 0$, iar axa centrală este o dreaptă care trece prin centrul instantaneu de rotaţie I şi este perpendiculară pe planul director. Axoidele sunt două suprafeţe cilindrice, axoida mobilă având numai o mişcare de rostogolire pură peste axoida fixă. Axa centrală a mişcării este, din acest motiv, axă instantanee de rotaţie fiindcă lipseşte mişcarea de alunecare între axoide;
- în cazul mişcării de solid cu punct fix, parametrii cinematici de ordinul întâi ai mişcării sunt $\vec{v}_{O'} = 0$ şi $\vec{\omega} \neq 0$. Axa centrală are direcţie variabilă, este coliniară cu vectorul $\vec{\omega}$ şi $\vec{v}_{min} = 0$. Ea este axă instantanee de rotaţie. Axoidele sunt două suprafeţe conice, axoida fixă numindu-se con

herpolodic iar axoida mobilă con polodic.

5. Proiecţia vitezei oricărui punct arbitrar al solidului pe direcţia vitezei unghiulare instantanee $\vec{\omega} \neq 0$ este aceeaşi în fiecare moment.

Proprietatea rezultă imediat prin înmulţirea scalară cu versorul vectorului $\vec{\omega}$ dat de (2.250) a ambilor termeni ai relaţiei de calcul a vitezei unui punct al corpului

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}' . \tag{2.261}$$

Rezultă

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v}_{O'} \cdot \vec{u} + (\vec{\omega} \times \vec{r}') \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}, \tag{2.262}$$

în care ultimul termen este nul.

Se obţine

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v}_{O'} \cdot \vec{u} = \frac{\vec{v}_{O'} \cdot \vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} = I_3 . \tag{2.263}$$

Pentru calcularea acceleraţiei punctului arbitrar M al rigidului (S) care are o mişcare generală, se determină, mai întâi, parametrii cinematici de ordinul II ai mişcării

$$\text{p.c.II} \begin{cases} \vec{a}_{O'} = \ddot{x}_{O'} \vec{i} + \ddot{y}_{O'} \vec{j} + \ddot{z}_{O'} \vec{k}, \\ \vec{\varepsilon} = \dot{\omega}'_x \vec{i}' + \dot{\omega}'_y \vec{j}' + \dot{\omega}'_z \vec{k}' = \dot{\omega}_x \vec{i} + \dot{\omega}_y \vec{j} + \dot{\omega}_z \vec{k}. \end{cases} \tag{2.264}$$

Proiecţiile, pe axele reperului mobil, a acceleraţiei polului O' sunt

$$\begin{aligned} a'_{O'_x} &= \vec{a}_{O'} \cdot \vec{i}' = \ddot{x}_{O'} \alpha_{11} + \ddot{y}_{O'} \alpha_{12} + \ddot{z}_{O'} \alpha_{13}, \\ a'_{O'_y} &= \vec{a}_{O'} \cdot \vec{j}' = \ddot{x}_{O'} \alpha_{21} + \ddot{y}_{O'} \alpha_{22} + \ddot{z}_{O'} \alpha_{23}, \\ a'_{O'_z} &= \vec{a}_{O'} \cdot \vec{k}' = \ddot{x}_{O'} \alpha_{31} + \ddot{y}_{O'} \alpha_{32} + \ddot{z}_{O'} \alpha_{33}. \end{aligned} \tag{2.265}$$

Expresia vectorială a acceleraţiei punctului M dată de (2.29) este

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'), \tag{2.266}$$

ale cărei proiecţii pe axele reperului mobil sunt

$$a'_x = a'_{O'_x} + \dot{\omega}'_y z' - \dot{\omega}'_z y' - (\omega'^2_y + \omega'^2_z) x' + \omega'_y \omega'_x y' + \omega'_z \omega'_x z',$$

$$a'_y = a'_{O'_y} + \dot{\omega}'_z x' - \dot{\omega}'_x z' + \omega'_x \omega'_y x' - (\omega'^2_x + \omega'^2_z) y' + \omega'_z \omega'_y z', \quad (2.267)$$

$$a'_z = a'_{O'_z} + \dot{\omega}'_x y' - \dot{\omega}'_y x' + \omega'_x \omega'_z x' + \omega'_y \omega'_z y' - (\omega'^2_x + \omega'^2_y) z'.$$

Se poate pune problema punctelor de accelerație nulă. Rezolvând sistemul (2.267) în necunoscutele x', y' și z' și cu $a'_x = a'_y = a'_z = 0$, soluția va reprezenta tocmai coordonatele punctelor căutate. În mișcarea generală sistemul este neomogen, liniar, de trei ecuații cu trei necunoscute și având determinantul

$$\Delta = -(\vec{\omega} \times \vec{\varepsilon})^2 \quad (2.268)$$

care este nenul. Rezultă că sistemul de ecuații este compatibil determinat, ceea ce înseamnă că în fiecare moment t al mișcării, există un punct J cu accelerație nulă numit polul accelerațiilor. În cazul mișcărilor particulare sistemul poate fi compatibil nedeterminat sau incompatibil putând deci exista mai multe puncte cu accelerație nulă sau nici un punct cu accelerație nulă.

2.6. Aplicații

1. Se consideră mecanismul plan din fig. 2.43 format din barele $OA = BD = R$ și semicercul de diametru $AB = 2R = OD$. Cunoscând că bara OA se roteşte cu viteză unghiulară constantă ω_0 și că la $t = 0$ este orizontală, să se determine traiectoria, viteza și accelerația punctului M de pe semicerc ($\theta = 60^\circ$).

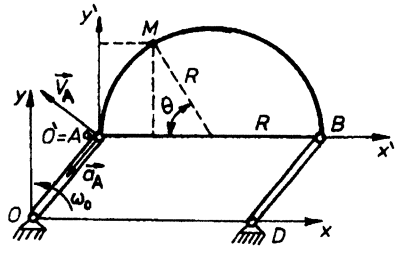

Fig. 2.43

Deoarece OABD este un parale-

logram, AB este paralelă cu OD în orice moment, deci placa semicirculară execută o mişcare de translaţie. Odată stabilită mişcarea particulară executată de corp, reperele se aleg conform §2.4.1., adică cu axele paralele şi cu polul mobil într-un punct cu mişcare cunoscută sau uşor de determinat. Astfel axele reperelor sunt cele arătate în fig. 2.43, iar polul mobil O' se alege în punctul A, deoarece acesta se ştie că are o traiectorie circulară de rază R pe care o parcurge cu viteză unghiulară constantă ω_0, viteza $\vec{v}_A$ fiind perpendiculară pe OA şi orientată în sensul dat de ω_0, iar modulul este $|\vec{v}_A| = \omega_0 \cdot |OA| = \omega_0 \cdot R$. Acceleraţia punctului A are numai componenta normală, deci are direcţia razei OA, sensul spre polul O şi modulul $|\vec{a}_A| = \omega_0^2 R$. În aceste condiţii punctul M are tot o traiectorie circulară de rază R, viteza sa va fi $\vec{v}_M = \vec{v}_A$ iar acceleraţia sa $\vec{a}_M = \vec{a}_A$.

Pentru a studia analitic mişcarea punctului M, se scriu mai întâi parametrii de poziţie ai mişcării cunoscând că, în condiţiile problemei, unghiul $A\hat{O}D$ este $\omega_0 t$, rezultând:

$$x_{O'} = R\cos(\omega_0 t),\ y_{O'} = R\sin(\omega_0 t).$$

Coordonatele punctului M sunt:

$$x' = R - R\cos\theta = \frac{R}{2},\ y' = R\sin\theta = R\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ecuaţiile parametrice ale traiectoriei au forma

$$x = x_{O'} + x' = \frac{R}{2} + R\cos(\omega_0 t),\ y = y_{O'} + y' = \frac{R\sqrt{3}}{2} + R\sin(\omega_0 t).$$

Dacă se elimină parametrul t, se obţine ecuaţia unui cerc:

$$\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = R^2,$$

care are raza R şi centrul în punctul $C\left(\frac{R}{2}, \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$.

Parametrii cinematici de ordinul întâi ai mişcării sunt:

$$\text{p.c.I} \begin{cases} \vec{v}_{O'} = -R\omega_0 \sin(\omega_0 t)\,\vec{i} + R\omega_0 \cos(\omega_0 t)\,\vec{j} \\ \vec{\omega} = 0, \end{cases}$$

şi avem

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{O'}.$$

Parametrii cinematici de ordinul doi ai mişcării sunt:

$$\text{p.c.II} \begin{cases} \vec{a}_{O'} = -R\omega_0^2 \cos(\omega_0 t)\,\vec{i} - R\omega_0^2 \sin(\omega_0 t)\,\vec{j}, \\ \vec{\varepsilon} = 0, \end{cases}$$

şi rezultă

$$\vec{a}_M = \vec{a}_{O'}.$$

2. O placă dreptunghiulară ABCD de dimensiuni AB = b, AD = 2a, se roteşte în jurul laturii AD cu viteză unghiulară constantă cunoscută ω_0 (fig. 2.44). Să se determine traiectoria, viteza şi acceleraţia punctului M al plăcii situat la jumătatea laturii BC, dacă AO = a.

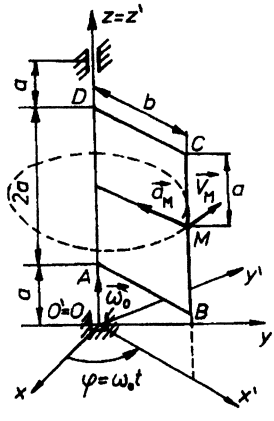

Fig. 2.44

Placa execută o mişcare de rotaţie în jurul unei axe fixe cu viteză unghiulară constantă ω_0. Reperele se aleg ca în §2.4.2 (fig. 2.44). Punctul va avea o traiectorie circulară, de rază b, pe care o parcurge cu viteză unghiulară constantă ω_0, deci viteza liniară va fi $\omega_0 b$ iar acceleraţia va avea numai componenta normală $-\omega_0^2 b$.

Singurul parametru de poziţie variabil în timp este unghiul $\varphi = \omega_0 t$ presupus nul la momentul $t = 0$.

Coordonatele punctului M sunt

$$x' = b,\ y' = 0,\ z' = 2a\ .$$

Ecuaţiile parametrice ale traiectoriei se obţin din egalitatea (2.45)

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = b\vec{i}' + 2a\vec{k}',$$

care se proiectează pe axele reperului fix utilizând tabela (2.43) şi rezultă:

$$x = b\cos\varphi,\ y = b\sin\varphi,\ z = 2a\ .$$

Eliminând parametrul φ, se obţine:

$$x^2 + y^2 = b^2,\ z = 2a\ ,$$

adică ecuaţia unui cerc de rază b situat în planul $z = 2a$ şi având centrul pe axa Oz.

Parametrii cinematici de ordinul întâi ai mişcării sunt:

$$\text{p.c.I}\ \begin{cases} \vec{v}_{O'} = 0, \\ \vec{\omega} = \omega_0\vec{k} = \omega_0\vec{k}', \end{cases}$$

iar viteza punctului M este:

$$\vec{v}_M = \vec{\omega}\times\vec{r}' = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ b & 0 & 2a \end{vmatrix} = b\omega_0\vec{j}'\ .$$

Parametrii cinematici de ordinul doi ai mişcării sunt:

$$\text{p.c.II}\ \begin{cases} \vec{a}_{O'} = 0, \\ \vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = 0, \end{cases}$$

iar acceleraţia puntului M este

$$\vec{a}_M = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = \vec{\omega}\times\vec{v}_M = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ 0 & b\omega_0 & 0 \end{vmatrix} = -b\omega_0^2\vec{i}'\ .$$

3. Să se determine viteza punctului E al barei DE pentru poziţia din desen a mecanismului reprezentat în fig. 2.45, cunoscând viteza unghiulară ω_0 a barei OA, lungimile barelor $OA = AB = 2l$, razele r şi R, lungimea barei $DE = 10l$, distanţa de la punctul D la peretele vertical 6l, unghiul dintre bara OA şi orizontală $\theta = 30^0$ şi că discul mic se rostogoleşte pur pe planul orizontal.

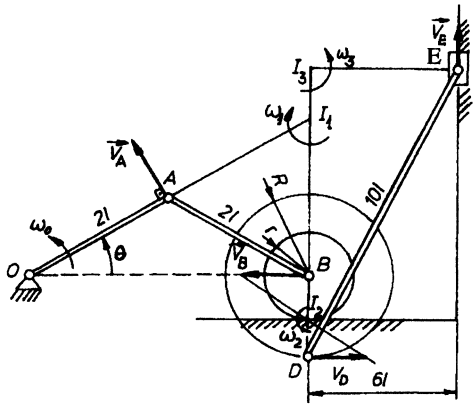

Fig. 2.45

Pentru rezolvarea problemei se vor utiliza centrul instantaneu de rotaţie şi proprietăţile vitezei exprimate de relaţia (2.111).

Se cunoaşte viteza punctului A care se mişcă pe un cerc de rază 2l, deci este perpendiculară pe raza $OA = 2l$, are sensul dat de ω_0 şi are modulul

$$|\vec{v}_A| = \omega_0 \cdot 2l.$$

Centrul instantaneu de rotaţie I_1 al barei AB se găseşte la intersecţia perpendicularei în A pe $\vec{v}_A$ cu perpendiculara în B pe direcţia vitezei lui B, viteză care este paralelă cu orizontala. Viteza unghiulară ω_1 are sensul dat de $\vec{v}_A$, direcţia perpendiculară pe planul figurii şi modulul

$$|\omega_1| = \frac{v_A}{|I_1A|} = \frac{\omega_0 \cdot 2l}{2l} = \omega_0,$$

unde $|I_1A| = 2l$ deoarece triunghiul OBI_1 este dreptunghic în B şi $|OA| = |AB| = 2l$.

Viteza punctului B are sensul dat de ω_1, direcţia perpendiculară pe planul desenului, iar modulul

$$|\vec{v}_B| = |\omega_1| \cdot |I_1B|$$

cu $|I_1B| = |OI_1| \sin\theta = 4l \sin 30^o = 2l$, deci

$$|\vec{v}_B| = |\omega_1| \cdot 2l.$$

Centrul instantaneu de rotaţia I_2 al corpului format din cele două discuri solidare concentrice este în punctul de contact al discului mic cu suprafaţa orizontală, deoarece rostogolirea este pură şi, prin urmare, viteza acestui punct este nulă. Viteza unghiulară ω_2 a acestui corp are sensul dat de $\vec{v}_B$, direcţia perpendiculară pe planul desenului iar modulul este

$$|\omega_2| = \frac{|v_B|}{r} = \frac{\omega_0 \cdot 2l}{r}.$$

Viteza punctului D este perpendiculară pe I_2D, are sensul dat de ω_2 şi modulul

$$|\vec{v}_D| = |\omega_2| \cdot |I_2D| = \frac{\omega_0 \cdot 2l}{r}(R - r).$$

Vârful vectorului $\vec{v}_D$, punctul I_2 şi vârful $\vec{v}_B$ sunt coliniare.

Centrul instantaneu de rotaţie I_3 al barei DE se găseşte la intersecţia perpendicularelor pe $\vec{v}_D$ şi pe direcţia vitezei punctului E care se mişcă numai pe verticală.

Viteza unghiulară ω_3 a barei DE are sensul dat de $\vec{v}_D$, direcţia perpendiculară pe planul figurii şi modulul

$$|\omega_3| = \frac{|\vec{v}_D|}{|I_3D|} = \frac{\omega_0 \cdot 2l}{r} \cdot \frac{(R - r)}{8l} = \frac{2\omega_0(R - r)}{8r}.$$

Viteza punctului E este perpendiculară pe I_3E, are sensul dat de ω_3 şi modulul

$$|\vec{v}_E| = |\omega_3| \cdot |I_3E| = \frac{2\omega_0(R-r)}{8r} \cdot 6l = \frac{3}{2}\frac{l(R-r)}{r} \cdot \omega_0 .$$

S-a determinat astfel complet vectorul $\vec{v}_E$ pentru poziţia mecanismului dată de unghiul $\theta = 30^o$.

4. Se consideră mecanismul din fig. 2.46 format dintr-un triunghi dreptunghic în B având catetele $AB = 3l$ şi $BC = l$, punctul A deplasându-se pe verticală iar punctul B pe orizontală cu viteză constantă, cunoscută, $\vec{v}_0$. În C este articulată o bară $CD = l$, al cărei punct D se poate deplasa numai pe orizontală. Se cer:

a) să se determine, pentru placa ABC, centrul instantaneu de rotaţie I, viteza unghiulară $\vec{\omega}$, acceleraţia unghiulară $\vec{\varepsilon}$, polul acceleraţiilor J, traiectoria, viteza şi acceleraţia punctului C, centroida fixă şi centroida mobilă;

b) să se determine, pentru bara CD, centrul instantaneu de rotaţie I_1, viteza unghiulară $\vec{\omega}_1$, acceleraţia unghiulară $\vec{\varepsilon}_1$, polul acceleraţiilor J_1, centroida fixă şi centroida mobilă.

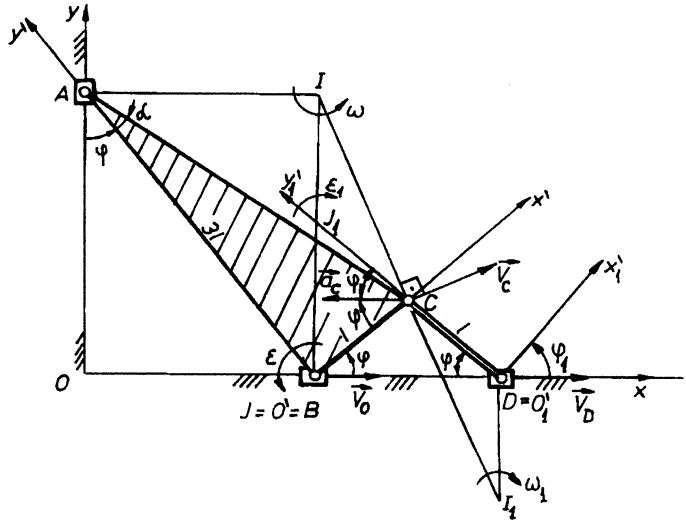

Fig. 2.46

Se alege reperul fix xOy cu axa Ox orizontală şi axa Oy verticală (fig. 2.46). Reperul solidar cu placa triunghiulară, $x'O'y'$ se alege cu polul O' în punctul B şi cu axele $O'x'$ şi $O'y'$ după catetele triunghiului. Unghiul φ este orientat de la Ox la $O'x'$ în sens trigonometric direct.

Centrul instantaneu de rotaţie I se găseşte la intersecţia perpendicularelor construite în punctele A şi B pe direcţiile vitezelor celor două puncte.

Viteza unghiulară ω a plăcii se poate determina folosind centrul instantaneu de rotaţie, ea având modulul

$$|\vec{\omega}| = \frac{|v_0|}{|IB|} = \frac{|v_0|}{3l\cos\varphi},$$

direcţia perpendiculară pe planul desenului şi sensul dat de $\vec{v}_0$. Utilizând regula burghiului drept, se obţine că sensul lui $\vec{\omega}$ este acelaşi cu sensul lui $\vec{k}$ şi $\vec{k}'$, rezultând:

$$\vec{\omega} = \frac{|v_0|}{3l\cos\varphi}\vec{k} = \frac{|v_0|}{3l\cos\varphi}\vec{k}'.$$

O altă posibilitate de a determina vectorul $\vec{\omega}$ constă în egalarea vitezei polului O', calculată în funcţie de unghiul φ, cu valoarea din datele problemei. Avem astfel

$$\vec{r}_{O'} = 3l\sin\varphi\,\vec{i},$$

de unde

$$\vec{v}_{O'} = \dot{\vec{r}}_{O'} = 3l\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{i}.$$

Egalând expresia de mai sus cu vectorul

$$\vec{v}_{O'} = v_0\,\vec{i},$$

rezultă

$$3l\dot{\varphi}\cos\varphi = v_0,$$

deci

$$\tilde{\omega} = \dot{\varphi} = \frac{v_0}{3l\cos\varphi}.$$

Pe această cale se obţine mărimea algebrică a vectorului $\vec{\omega}$.

Accelerația unghiulară $\vec{\varepsilon}$ se calculează prin derivarea lui $\vec{\omega}$, obţinându-se

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \frac{v_0 \sin\varphi}{3l\cos^2\varphi}\dot{\varphi}\vec{k} = \frac{v_0^2 \sin\varphi}{9l^2\cos^3\varphi}\vec{k} = \frac{v_0^2 \sin\varphi}{9l^2\cos^3\varphi}\vec{k}'.$$

Polul accelerațiilor J coincide cu punctul B şi, deci, cu polul O', deoarece acest punct se mişcă rectiliniu şi uniform, având, prin urmare, accelerația nulă.

Parametrii de poziţie ai plăcii sunt

$$x_{O'} = 3l\sin\varphi,\ y_{O'} = 0,\ \varphi = \varphi(t),$$

iar coordonatele punctului C sunt:

$$x' = l,\ y' = 0,$$

prin urmare ecuația vectorială a traiectoriei (2.87) se scrie pentru punctul C sub forma:

$$x\vec{i} + y\vec{j} = 3l\sin\varphi\,\vec{i} + l\vec{i}'.$$

Ecuațiile parametrice ale traiectoriei se obţin proiectând relația de mai sus pe axele reperului fix folosind tabela (2.43), rezultând

$$x = 3l\sin\varphi + l\cos\varphi$$
$$y = l\sin\varphi$$

Eliminând parametrul φ, se obţine ecuația unei elipse:

$$x^2 - 6xy + 10y^2 - l^2 = 0.$$

Pentru a determina viteza punctului C, se scriu, mai întâi, parametrii cinematici de ordinul întâi ai mişcării:

$$\text{p.c.I.}\begin{cases}\vec{v}_{O'} = 3l\dot{\varphi}\cos\theta\vec{i} = v_0\vec{i},\\ \vec{\omega} = \dfrac{v_0}{3l\cos\varphi}\vec{k} = \dfrac{v_0}{3l\cos\varphi}\vec{k}'.\end{cases}$$

Viteza punctului C se calculează cu relaţia (2.95) care se scrie:

$$\vec{v} = v_0\vec{i} + \begin{vmatrix}\vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}'\\ 0 & 0 & \dfrac{v_0}{3l\cos\varphi}\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix} = v_0\vec{i} + \frac{v_0}{3\cos\varphi}\vec{j}'.$$

Proiectând relaţia anterioară pe axele reperului mobil, se obţine:

$$v'_x = v_0\cos\varphi,$$

$$v'_y = -v_0\sin\varphi + \frac{v_0}{3\cos\varphi},$$

cu $|\vec{v}| = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2}$.

Viteza punctului C se poate obţine şi folosind centrul instantaneu de rotaţie I, ea fiind perpendiculară pe IC, având sensul dat de ω şi modulul

$$|\vec{v}_C| = |\vec{\omega}|\cdot|IC|,$$

unde $|IC|$ se obţine din triunghiul IAC folosind teorema cosinusului:

$$|IC| = \sqrt{10l^2 + 9l^2\sin^2\varphi - 6\sqrt{10}\,l^2\sin\varphi\sin(\alpha+\varphi)}$$

unde α este unghiul din vârful A al triunghiului ABC.

Cunoscând parametrii cinematici de ordinul doi ai mişcării:

$$\text{p.c.II.}\begin{cases}\vec{a}_{O'} = 0,\\ \vec{\varepsilon} = \dfrac{v_0^2\sin\varphi}{9l^2\cos^3\varphi}\vec{k}',\end{cases}$$

se poate determina acceleraţia punctului C cu relaţia (2.140), rezultând

$$\vec{a} = \begin{vmatrix}\vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}'\\ 0 & 0 & \dfrac{v_0^2\sin\varphi}{9l^2\cos^3\varphi}\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix} - \frac{v_0^2}{9l^2\cos^2\varphi}(l\vec{i}') = -\frac{v_0^2}{9l\cos^2\varphi}\vec{i}' + \frac{v_0^2\sin\varphi}{9l\cos^3\varphi}\vec{j}'.$$

Accelerația punctului C se poate obține și folosind polul accelerațiilor J. Direcția și sensul se obțin rotind JC în jurul lui C în sens opus lui ε cu unghiul β a cărui tangentă este:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} = \frac{v_0^2 \sin\varphi}{9l^2\cos^3\varphi} \cdot \frac{9l^2\cos^2\varphi}{v_0^2} = \operatorname{tg}\varphi,$$

adică, așa cum reiese din fig. 2.46, $\vec{a}_C$ este paralelă cu axa Ox și de sens opus cu aceasta. Modulul lui $\vec{a}_C$ este

$$|\vec{a}_C| = |JC| \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{v_0^2}{9l\cos^3\varphi}.$$

Ecuațiile centroidei fixe sunt

$$x_I = x_{O'} - \frac{\dot{y}_{O'}}{\dot{\varphi}} = 3l\sin\varphi,$$

$$y_I = y_{O'} + \frac{\dot{x}_{O'}}{\dot{\varphi}} = 3l\cos\varphi.$$

Eliminând parametrul φ se obține cercul de ecuație:

$$x_I^2 + y_I^2 = (3l)^2,$$

care are centrul în originea O și raza 3l.

Ecuațiile centroidei mobile sunt

$$x_I' = \frac{\dot{x}_{O'}}{\dot{\varphi}}\sin\varphi - \frac{\dot{y}_{O'}}{\dot{\varphi}}\cos\varphi = 3l\cos\varphi\sin\varphi = \frac{3l}{2}\sin 2\varphi,$$

$$y_I' = \frac{\dot{x}_{O'}}{\dot{\varphi}}\cos\varphi + \frac{\dot{y}_{O'}}{\dot{\varphi}}\sin\varphi = 3l\cos^2\varphi = \frac{3l}{2}(1+\cos 2\varphi).$$

Eliminând parametrul φ se obține cercul de ecuație:

$$x_I'^2 + \left(y_I' - \frac{3l}{2}\right)^2 = \left(\frac{3l}{2}\right)^2$$

care are centrul în punctul de coordonate $\left(0, \frac{3l}{2}\right)$ și raza $\frac{3l}{2}$, raportate la reperul $x'O'y'$.

b. Se ataşează de bara CD un reper $x_1'O_1'y_1'$ cu polul O_1' în punctul D şi cu axa $O_1'y_1'$ în lungul barei.

Centrul instantaneu de rotaţie I este punctul de intersecţie al perpendicularelor pe viteza lui C şi pe direcţia vitezei lui D care este în lungul axei Ox (fig. 2.46).

Pentru a determina viteza unghiulară a barei CD, $\vec{\omega}_2$, se observă, din fig. 2.46, că

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

relaţie care, prin derivare, conduce la

$$\omega_1 = \dot{\varphi}_1 = -\dot{\varphi} = -\omega .$$

Vectorul $\vec{\omega}_1$ este deci

$$\vec{\omega}_1 = -\frac{v_0}{3l\cos\varphi}\vec{k} = -\frac{v_0}{3l\cos\varphi}\vec{k}',$$

el având sens opus cu $\vec{\omega}$.

Acceleraţia unghiulară $\vec{\varepsilon}_1$ rezultă din derivarea lui $\vec{\omega}_1$:

$$\vec{\varepsilon}_1 = \dot{\vec{\omega}}_1 = -\frac{v_0^2 \sin\varphi}{9l^2\cos^3\varphi}\vec{k} = -\frac{v_0^2 \sin\varphi}{9l^2\cos^3\varphi}\vec{k}',$$

ea având sens opus cu $\vec{\varepsilon}$.

Cunoscând $|\vec{a}_C|$ se poate calcula distanţa $|J_1C|$

$$|J_1C| = \frac{|\vec{a}_C|}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \omega_1^4}} = |JC| = l .$$

Polului acceleraţiilor J_1 al barei CD este pe direcţia dată de vectorul $\vec{a}_C$ rotit în jurul lui C în sensul dat de $\vec{\varepsilon}_1$ cu unghiul β_1 a cărui tangentă este:

$$\mathrm{tg}\beta_1 = \frac{|\varepsilon_1|}{\omega_1^2} = \mathrm{tg}\beta = \mathrm{tg}\varphi,$$

la distanţa $|J_1C| = l$. Din fig. 2.46, rezultă că, în urma acestei operaţii, punctul J_1 se află pe axa $O_1'y_1'$ la distanţa $2l$ de O_1'.

Pentru a determina ecuaţiile centroidelor, se calculează mai întâi coordonatele polului O_1' şi derivatele lor, rezultând

$$x_{O_1'} = 3l\sin\varphi + 2l\cos\varphi, \qquad y_{O_1'} = 0,$$
$$\dot{x}_{O_1'} = 3l\dot{\varphi}\cos\varphi - 2l\dot{\varphi}\sin\varphi, \qquad \dot{y}_{O_1'} = 0.$$

Ecuaţiile centroidei fixe sunt

$$x_{I_1} = x_{O_1'} - \frac{\dot{y}_{O_1'}}{\dot{\varphi}_1} = 3l\sin\varphi + 2l\cos\varphi,$$
$$y_{I_1} = y_{O_1'} + \frac{\dot{x}_{O_1'}}{\dot{\varphi}_1} = -3l\cos\varphi + 2l\sin\varphi,$$

unde s-a ţinut cont de faptul că $\dot{\varphi}_1 = -\dot{\varphi}$.

Eliminând parametrul φ, se obţine:

$$x_{I_1}^2 + y_{I_1}^2 = 13l^2$$

care este un cerc cu centrul în polul O şi rază $l\sqrt{13}$.

Ecuaţiile centroidei mobile sunt:

$$x_{I_1}' = \frac{\dot{x}_{O_1'}}{\dot{\varphi}_1}\sin\varphi_1 - \frac{\dot{y}_{O_1'}}{\dot{\varphi}_1}\cos\varphi_1 = -3l\cos^2\varphi + 2l\sin\varphi\cos\varphi,$$
$$y_{I_1}' = \frac{\dot{x}_{O_1'}}{\dot{\varphi}_1}\cos\varphi_1 + \frac{\dot{y}_{O_1'}}{\dot{\varphi}_1}\sin\varphi_1 = -3l\sin\varphi\cos\varphi + 2l\sin^2\varphi.$$

Trecând la unghiul dublu în relaţiile de mai sus, se poate elimina unghiul φ, obţinându-se

$$\left(x_{I_1}' + \frac{3l}{2}\right)^2 + \left(y_{I_1}' - l\right)^2 = \frac{13l^2}{4},$$

care reprezintă ecuaţia unui cerc cu centrul într-un punct de coordonate $\left(-\frac{3l}{2}, l\right)$ şi rază $\frac{l\sqrt{13}}{2}$ raportat la reperul $x_1'O_1'y_1'$.