CAPITOLUL I

SISTEME DE VECTORI

1.1. Considerații generale

În mecanică există două tipuri de mărimi fizice şi anume:

- mărimi **scalare** care sunt caracterizate complet de o valoare numerică ce exprimă numărul de unități de măsură conținut de mărimea respectivă;
- mărimi **vectoriale** care sunt caracterizate complet, pe lângă valoarea numerică (modul), de direcție, sens şi punct de aplicație.

Exemple de mărimi scalare: masa, volumul, timpul, energia cinetică, lucrul mecanic, puterea.

Exemple de mărimi vectoriale: viteza, accelerația, impulsul, momentul cinetic, forța.

În mecanică există trei tipuri de vectori:

1. vectori legați, a căror punct de aplicație este bine determinat (fix) şi nu pot fi deplasați cum este, de exemplu, viteza unui punct;

2. vectori alunecători, care pot fi alunecați pe dreapta suport, de exemplu, forța care acționează asupra unui solid-rigid;
3. vectori liberi, care pot fi translați în spațiu rămânând deci paraleli cu ei înşişi, de exemplu, vectorul cuplu de vectori.

Pentru a putea opera uşor cu mărimile vectoriale se utilizează un reper care, de regulă, este un reper cartezian ortogonal drept notat $R(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ unde 0 este originea reperului numită şi pol iar $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ este o bază ortonormată (fig. 1.1). Vectorii $\vec{i}$, $\vec{j}$ şi $\vec{k}$ se numesc versori ai axelor 0x, 0y şi respectiv 0z. Ei au modulul egal cu unitatea şi sensul lor indică sensul pozitiv al axei. Orice vector $\vec{F}$ poate fi scris sub forma:

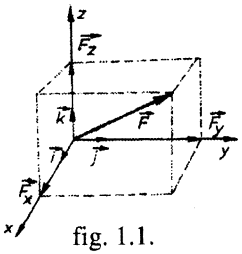


fig. 1.1.

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}, \tag{1.1}$$

numită şi expresia analitică a vectorului $\vec{F}$. Scalarii F_x, F_y şi F_z sunt mărimile algebrice ale proiecțiilor lui $\vec{F}$ pe cele trei axe sau coordonatele lui $\vec{F}$ în baza $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Odată cunoscută expresia analitică a vectorului, acesta este complet determinat ca vector liber. Astfel, mărimea (modulul) vectorului $\vec{F}$ este:

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \tag{1.2}$$

iar direcția şi sensul (dacă $\vec{F} \neq 0$) sunt date de:

$$\cos(\vec{F},\vec{i}) = \frac{F_x}{|\vec{F}|};\ \cos(\vec{F},\vec{j}) = \frac{F_y}{|\vec{F}|};\cos(\vec{F},\vec{k}) = \frac{F_z}{|\vec{F}|}. \tag{1.3}$$

Se poate trage concluzia că un vector liber este determinat de trei parametri care sunt cele trei coordonate.

Un vector legat este determinat de şase parametri care sunt cele trei coordonate ale vectorului (F_x,F_y,F_z) şi cele trei coordonate ale punctului de aplicație (x,y,z).

Se va arăta în continuare că un vector alunecător este determinat de cinci parametri.

1.2. Momentul unui vector în raport cu un punct

Se consideră, mai întâi, un vector legat $\vec{F}$ aplicat într-un punct A şi O un alt punct numit pol faţă de care se va defini momentul vectorului $\vec{F}$. Momentul lui $\vec{F}$ faţă de punctul (polul) O mai este denumit şi moment polar.

Definiţie: Momentul vectorului legat $\vec{F}$ în raport cu polul O este un vector dat de produsul vectorial dintre vectorul de poziţie $\overrightarrow{OA} = \vec{r}$ al punctului de aplicaţie A al vectorului $\vec{F}$ şi vectorul $\vec{F}$ (fig. 1.2).

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}. \qquad (1.4)$$

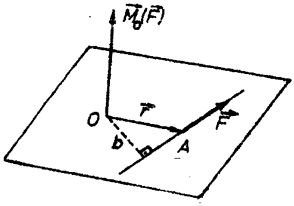


fig. 1.2.

Se consideră acum un vector alunecător $\vec{F}$ aplicat într-un punct A de pe suportul său şi polul O. Momentul polar al vectorului $\vec{F}$ presupus ca fiind vector legat aplicat în punctul A este dat de formula 1.4. Dacă vectorul $\vec{F}$ alunecă pe suportul său astfel încât punctul său de aplicaţie devine un alt punct oarecare B (fig. 1.3) situat tot pe suport, atunci deoarece:

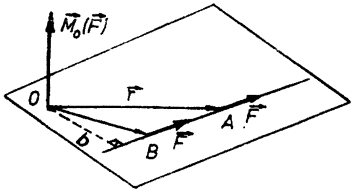


fig. 1.3.

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}, \qquad (1.5)$$

rezultă că:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \times \vec{F} = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}) \times \vec{F} =$$

$$= \overrightarrow{OB} \times \vec{F} + \overrightarrow{BA} \times \vec{F} = \overrightarrow{OB} \times \vec{F}, \qquad (1.6)$$

întrucât $\overrightarrow{BA} \times \vec{F} = 0$ fiindcă cei doi vectori sunt coliniari.

Relația 1.6. arată că momentul polar al vectorului alunecător $\vec{F}$ nu depinde de poziția lui $\vec{F}$ pe suportul său.

Definiție: Momentul unui vector alunecător $\vec{F}$ în raport cu un pol O este un vector dat de produsul vectorial dintre vectorul de poziție $\vec{r}$ al unui punct **oarecare** de pe suportul său și vectorul $\vec{F}$:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{1.7}$$

Din modul de definire a momentului polar al unui vector legat sau alunecător (adică printr-un produs vectorial), rezultă că momentul polar este un vector perpendicular pe planul determinat de punctul O și de suportul vectorului $\vec{F}$ (deci și pe vectorul $\vec{F}$), că are sensul dat de regula burghiului drept și că modulul său este:

$$\left|\vec{M}_O(\vec{F})\right| = \left|\vec{r} \times \vec{F}\right| = \left|\vec{r}\right|\left|\vec{F}\right|\sin(\vec{r},\vec{F}) = \left|\vec{F}\right| \cdot b\ , \tag{1.8}$$

în care $b = \left|\vec{r}\right|\sin(\vec{r},\vec{F})$ este numit brațul vectorului și reprezintă lungimea perpendicularei coborâtă din pol pe suportul lui $\vec{F}$ (fig. 1.2. și fig. 1.3.).

1.2.1. Proprietățile momentului polar

Momentul polar al unui vector legat sau alunecător are următoarele proprietăți:

1. Momentul polar se modifică la schimbarea polului din O în O′ conform relației:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{M}_{O'}(\vec{F}) + \overrightarrow{OO'} \times \vec{F}, \tag{1.9}$$

ceea ce arată că este un vector legat. Numai în cazul când $\overrightarrow{OO'} \times \vec{F} = 0$, momentul polar rămâne neschimbat.

Demonstrație: Pe baza figurii 1.4., se poate scrie relația vectorială:

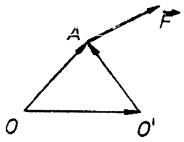


fig. 1.4.

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A}, \tag{1.10}$$

care conduce la:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \times \vec{F} = (\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A}) \times \vec{F} =$$

$$\overrightarrow{OO'} \times \vec{F} + \overrightarrow{O'A} \times \vec{F} = \overrightarrow{OO'} \times \vec{F} + \vec{M}_{O'}(\vec{F}).$$

2. Produsul scalar dintre $\vec{M}_O(\vec{F})$ şi $\vec{F}$ este nul în orice pol (este un invariant la schimbarea polului).

Demonstraţie: Deoarece $\vec{M}_O(\vec{F})$ este perpendicular pe $\vec{F}$ rezultă că produsul lor scalar este nul.

$$\vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{F} = 0. \tag{1.11}$$

În cazul schimbări polului dintre O şi O′ avem:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{F} &= (\vec{M}_{O'}(\vec{F}) + \overrightarrow{OO'} \times \vec{F}) \cdot \vec{F} = \\ &= \vec{M}_{O'}(\vec{F}) \cdot \vec{F} + (\overrightarrow{OO'} \times \vec{F}) \cdot \vec{F} = \vec{M}_{O'}(\vec{F}) \cdot \vec{F} = 0 \end{aligned} \tag{1.12}$$

produsul mixt fiind nul deoarece conţine doi vectori identici.

3. Momentul polar al unui vector $\vec{F} \neq 0$ este nul în cazul în care suportul acestuia trece prin pol.

Demonstraţie: Atunci când suportul vectorului $\vec{F}$ trece prin pol, vectorul de poziţie al punctului de aplicaţie $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ fie este coliniar cu $\vec{F}$ fie că punctele O şi A coincid, adică $\vec{r} = \vec{O}$, ceea ce înseamnă că vectorul este aplicat chiar în pol. În ambele situaţii $\vec{r} \times \vec{F} = 0$.

1.2.2. Calculul momentului polar

Se consideră polul O ca origine a unui reper $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. În această situaţie, momentul polar al unui vector $\vec{F}$ se calculează cu ajutorul expresie analitice a unui produs vectorial atunci când se cunoaşte expresia analitică a

vectorului $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$ şi expresia analitică a vectorului de poziţie a punctului de aplicaţie A al său, $\overrightarrow{OA} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Dacă vectorul $\vec{F}$ este alunecător, atunci punctul A poate fi un punct oarecare de pe suportul vectorului $\vec{F}$.

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (xF_y - yF_x)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k} =$$

$$= M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}. \qquad (1.13)$$

Momentul polar este complet determinat de expresia analitică dată de (1.13). El este aplicat în polul O, are modulul:

$$\left|\vec{M}_O(\vec{F})\right| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}, \qquad (1.14)$$

şi orientarea dată de cosinusurile unghiurilor pe care le face vectorul cu axele de coordonate:

$$\cos(\vec{M}_O(\vec{F}), \vec{i}) = \frac{M_x}{\left|\vec{M}_O(\vec{F})\right|}; \quad \cos(\vec{M}_O(\vec{F}), \vec{j}) = \frac{M_y}{\left|\vec{M}_O(\vec{F})\right|};$$

$$\cos(\vec{M}_O(\vec{F}), \vec{k}) = \frac{M_z}{\left|\vec{M}_O(\vec{F})\right|}. \qquad (1.15)$$

Un caz particular este acela în care vectorul $\vec{F}$ se găseşte într-un plan de coordonate. Acest lucru înseamnă că vectorul moment are direcţie cunoscută şi anume direcţia perpendicularei pe planul în cauză. Presupunând că planul de coordonate este Oxy, momentul polar va fi coliniar cu axa Oz şi va avea versorul $\vec{k}$. În acest caz, rezultă:

$$M_x = 0;\ M_y = 0;\ M_z = \pm\left|\vec{M}_O(\vec{F})\right| \pm b|F|, \qquad (1.16)$$

deci momentul unui vector $\vec{F}$ situat în planul xOz se calculează cu relaţia:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \pm\left|\vec{M}_O(\vec{F})\right|\vec{k} = M_z \cdot \vec{k} = \pm b\left|\vec{F}\right|\vec{k}. \qquad (1.17)$$

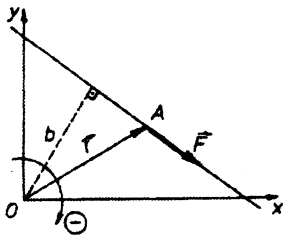


fig. 1.5.

Semnul + sau – din relaţia (1.17) se stabileşte aplicând fie regula burghiului drept, fie regula observatorului (fig. 1.5) care va fi explicată în continuare. Privind dinspre sensul pozitiv al axei Oz, se roteşte braţul b în jurul polului O în sensul indicat de vectorul $\vec{F}$. La o rotaţie în sens trigonometric direct semnul momentului este pozitiv iar la o rotaţie în sens invers (orar) semnul momentului este minus. Aceasta este o convenţie ce corespunde cu regula burghiului drept.

Relaţia de calcul (1.13) se poate folosi şi în cazul plan conducând la forma particulară:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (xF_y - yF_x)\vec{k} = M_z\vec{k}. \qquad (1.18)$$

1.3. Momentul unui vector în raport cu o axă

Momentul unui vector $\vec{F}$ în raport cu o axă (Δ), numit şi moment axial, este un **scalar** şi anume mărimea algebrică a proiecţiei pe axa (Δ) a momentului vectorului $\vec{F}$ calculat într-un pol **oarecare** O aparţinând axei Δ:

$$M_\Delta = \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u} = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \vec{u}, \qquad (1.19)$$

unde $\vec{u}$ este versorul axei Δ (fig. 1.6).

Observaţie: Prin mărimea algebrică a unui vector se înţelege modulul acestuia însoţit de semn. Mărimea algebrică a proiecţiei unui vector $\vec{v}$ pe o axă având versorul $\vec{u}$, notată v_u, se obţine înmulţind scalar vectorul cu versorul axei:

$$v_u = \vec{v} \cdot \vec{u}. \qquad (1.20)$$

Vectorul proiecţie rezultă prin înmulţirea mărimii algebrice a proiecţiei vectorului cu versorul axei:

$$\vec{v}_u = v_u \cdot \vec{u} = (\vec{v} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{u}\,. \qquad (1.21)$$

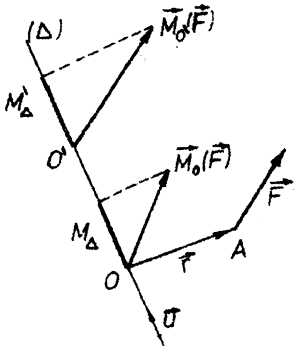


fig. 1.6.

Pentru a arăta că momentul axial nu depinde de alegerea polului pe axă, se alege un alt pol O′ pe dreapta Δ (fig. 1.6.). Notăm momentul axial în acest caz cu M'_Δ şi avem:

$$M'_\Delta = \vec{M}_{O'}(\vec{F}) \cdot \vec{u} = (\vec{M}_O(\vec{F}) - \overrightarrow{OO'} \times \vec{F}) \cdot \vec{u} =$$

$$= \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u} - (\overrightarrow{OO'} \times \vec{F}) \cdot \vec{u} = \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u} = M_\Delta \quad (1.22)$$

deoarece produsul mixt $(\overrightarrow{OO'} \times \vec{F}) \cdot \vec{u}$ este nul datorită faptului că vectorii $\overrightarrow{OO'}$ şi $\vec{u}$ sunt coliniari.

Observaţii:

1. Definiţia momentului axial este valabilă atât pentru vectori alunecători cât şi pentru vectori legaţi deoarece, dacă vectorul alunecă pe suportul său, momentul polar nu se modifică.

2. Expresiile M_x, M_y şi M_z din expresia momentului polar: $\vec{M}_O(\vec{F}) = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}$ sunt tocmai momentele axiale ale lui $\vec{F}$ în raport cu axele de coordonate Ox, Oy şi respectiv Oz.

3. Condiţia ca momentul axial să fie nul este ca vectorul F şi axa (Δ) să fie coplanare, fapt care rezultă din definiţia (1.19), şi este îndeplinită în următoarele trei cazuri:

a. vectorul $\vec{F}$ este paralel cu axa Δ;

b. vectorul $\vec{F}$ intersectează axa Δ;

c. vectorul $\vec{F}$ este situat pe axa Δ.

1.3.1. Calculul momentului axial

Dacă momentul axial M_Δ al unui vector $\vec{F}$ este diferit de zero, acesta este egal cu momentul axial al proiecției $\vec{F}_1$ a vectorului $\vec{F}$ pe un plan (P) perpendicular pe axa Δ:

$$M_\Delta(\vec{F}) = M_\Delta(\vec{F}_1) = \pm\left|\vec{M}_O(\vec{F}_1)\right|, \tag{1.23}$$

în care O este intersecția dintre planul (P) și axa (Δ) (fig. 1.7.).

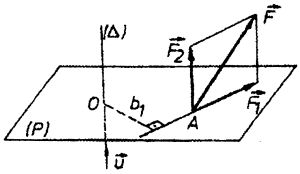


fig. 1.7.

Fie (P) un plan perpendicular pe axa (Δ) și care trece prin punctul de aplicație A al vectorului $\vec{F}$ și fie O punctul de intersecție al axei Δ cu planul (P). Se descompune $\vec{F}$ în două componente $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, unde $\vec{F}_2$ este paralelă cu axa (Δ) (fig. 1.7.). Notând cu $\vec{u}$ versorul axei (Δ), se obține:

$$\begin{aligned} M_\Delta(\vec{F}) = M_O(\vec{F})\cdot\vec{u} = (\vec{r}\times\vec{F})\vec{u} = [\vec{r}\times(\vec{F}_1+\vec{F}_2)]\vec{u} = (\vec{r}\times\vec{F}_1)\vec{u} + (\vec{r}\times\vec{F}_2)\vec{u} = \\ = (\vec{r}\times\vec{F}_1)\vec{u} = M_\Delta(\vec{F}_1) \end{aligned} \tag{1.24}$$

deoarece în produsul mixt $(\vec{r}\times\vec{F}_2)\vec{u}$ vectorii $\vec{F}_2$ și $\vec{u}$ sunt paraleli și deci produsul este nul. Pe de altă parte avem:

$$M_\Delta(\vec{F}_1) = M_O(\vec{F}_1)\cdot\vec{u} = [\pm\left|\vec{M}_O(\vec{F}_1)\right|\vec{u}]\cdot\vec{u} = \pm\left|\vec{M}_O(\vec{F}_1)\right| = \pm b_1\left|\vec{F}_1\right|, \tag{1.25}$$

în care b_1 este brațul vectorului $\vec{F}_1$ iar semnul se alege conform celor arătate la calculul momentului unui vector în plan.

Atunci când vectorul $\vec{F}$ este alunecător, planul (P) nu este neapărat necesar să conțină punctul de aplicație A, dar trebuie să fie perpendicular pe axa Δ.

1.4. Caracterizarea unui vector alunecător. Suportul unui vector alunecător

Pentru a determina mărimea, direcția, sensul şi suportul unui vector alunecător $\vec{F}$ este suficient să se cunoască cinci parametri independenți dintre următorii şase: F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z. Aceştia reprezintă coordonatele vectorului şi coordonatele momentului său calculat în raport cu originea O a axelor. Deoarece relația (1.11) este întotdeauna îndeplinită, rezultă că între cei şase parametri există ecuația de legătură:

$$F_xM_x + F_yM_y + F_zM_z = 0, \tag{1.26}$$

care arată că numai cinci dintre ei sunt independenți. Cunoscând cele şase mărimi scalare (numite şi coordonatele lui Plücker), se poate determina suportul vectorului $\vec{F}$ aşa cum se arată în continuare. Deoarece nici una dintre coordonatele lui Plücker nu se modifică atunci când vectorul $\vec{F}$ alunecă pe suportul său, putem considera punctul A_0 de pe suport astfel încât vectorul $\overrightarrow{OA_0} = \vec{r}_0$ să fie perpendicular pe vectorul $\vec{F}$ (fig. 1.8.). Acum se poate scrie:

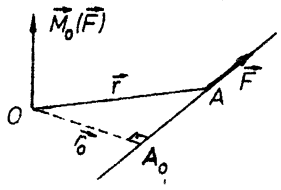


fig. 1.8.

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r}_0 \times \vec{F}, \tag{1.27}$$

care se înmulțeşte vectorial la stânga cu $\vec{F}$, obținându-se:

$$\vec{F} \times \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{F} \times (\vec{r}_0 \times \vec{F}). \tag{1.28}$$

După dezvoltarea dublului produs vectorial, rezultă:

$$\vec{F} \times \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{F}^2 \cdot \vec{r}_0 - (\vec{F} \cdot \vec{r}_0)\vec{F}. \tag{1.29}$$

Cum vectorii $\vec{r}_0$ şi $\vec{F}$ sunt perpendiculari, produsul lor scalar este zero şi deci ultimul termen se anulează.

Se obține:

$$\vec{r}_0 = \frac{\vec{F} \times \vec{M}_O(\vec{F})}{\vec{F}^2}, \tag{1.31}$$

reprezintă tocmai lungimea brațului lui $\vec{F}$.

Ecuația vectorială a dreptei suport este determinată de punctul A_0 și de direcția lui $\vec{F}$ (fig. 1.8.).

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{F} == \frac{\vec{F} \times \vec{M}_O(\vec{F})}{F^2} + \lambda\vec{F}, \tag{1.32}$$

în care $\vec{r}$ este vectorul de poziție al unui punct oarecare de pe dreaptă, iar λ este un parametru scalar astfel ales încât $\overrightarrow{A_0A} = \lambda\vec{F}$.

Ecuațiile parametrice ale dreptei suport se obțin din (1.32) prin proiectarea pe axele unui reper Oxyz:

$$x = x_0 + \lambda F_x;\ y = y_0 + \lambda F_y;\ z = z_0 + \lambda F_z\ . \tag{1.33}$$

Ecuațiile canonice ale dreptei suport rezultă din (1.33) prin eliminarea parametrului λ între cele trei relații:

$$\frac{x - x_0}{F_x} = \frac{y - y_0}{F_y} = \frac{z - z_0}{F_z}. \tag{1.34}$$

Coordonatele punctului A_0 rezultă din expresia analitică a relației (1.30):

$$x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} = \frac{1}{F^2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ M_x & M_y & M_z \end{vmatrix}, \tag{1.35}$$

de unde:

$$x_0 = \frac{1}{F^2}(F_yM_z - F_zM_y);\ y_0 = \frac{1}{F^2}(F_zM_x - F_xM_z);$$
$$z_0 = \frac{1}{F^2}(F_xM_y - F_yM_x). \tag{1.36}$$

Un caz particular important este atunci când vectorul $\vec{F}$ se află în planul de coordonate xOy, situație în care $F_z = 0$, $M_x = 0$ și $M_y = 0$. Ecuația

suportului se obține imediat din relația (1.18) în care x şi y reprezintă acum coordonatele generice ale unui punct al dreptei suport:

$$xF_y - yF_x = M_z . \tag{1.37}$$

1.5. Sisteme de vectori

1.5.1. Torsorul unui sistem de vectori

Fie $(S) = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\}$ un sistem de vectori legați aplicați în punctele A_i sau un sistem de vectori alunecători cu suporturile trecând prin punctele A_i şi O un pol. Notăm vectorii $\overrightarrow{OA_i}$ cu $\vec{r}_i$.

Pentru sistemul (S) **se definesc** vectorii:

1. **Vectorul rezultant al sistemului**, notat $\vec{\mathcal{R}}$, definit ca suma vectorilor din sistem considerați liberi:

$$\vec{\mathcal{R}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i . \tag{1.38}$$

2. **Vectorul moment rezultant al sistemului în polul O**, notat $\vec{\mathcal{M}}_O$, definit ca suma momentelor vectorilor $\vec{F}_i$ calculate în raport cu polul O:

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + ... + \vec{M}_O(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{M}_O(\vec{F}_i) , \tag{1.39}$$

în care

$$\vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{r}_i \times \vec{F}_i . \tag{1.40}$$

Dacă se cunosc expresiile analitice ale vectorilor $\vec{F}_i$ şi ale momentelor lor $\vec{M}_O(\vec{F}_i)$ calculate în raport cu un reper $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, proiecțiile vectorului

rezultant $\vec{\mathcal{R}}$ şi ale momentului rezultant $\vec{\mathcal{M}}_O$ sunt date de expresiile:

$$\mathcal{R}_x = \sum_{i=1}^{i=n} F_{i_x} \; ; \; \mathcal{R}_y = \sum_{i=1}^{i=n} F_{i_y} \; ; \; \mathcal{R}_z = \sum_{i=1}^{i=n} F_{i_z} \; ,$$

$$\mathcal{M}_{Ox} = \sum_{i=1}^{i=n} M_{i_x} \; ; \; \mathcal{M}_{Oy} = \sum_{i=1}^{i=n} M_{i_y} \; ; \; \mathcal{M}_{Oz} = \sum_{i=1}^{i=n} M_{i_z} \; . \qquad (1.41)$$

Observaţie: Momentul unui singur vector se notează cu literă mare de tipar iar vectorul moment rezultant se notează cu literă mare rondă. Tot cu literă mare rondă se notează şi vectorul rezultant.

Definiţie: Se numeşte torsor al sistemului (S) în polul O, notat $T_O(S)$, perechea $\{\vec{\mathcal{R}}, \vec{\mathcal{M}}_O\}$ formată din vectorul rezultant şi vectorul moment rezultant în polul O.

1.5.2. Proprietăţile torsorului

1. Fie λ un scalar şi (λS) sistemul format din vectorii alunecători sau legaţi $(\lambda\vec{F}_1, \lambda\vec{F}_2, ..., \lambda\vec{F}_n)$. Torsorul în polul O al sistemului (λS) este:

$$T_O(\lambda S) = \lambda T_O(S) \, , \qquad (1.42)$$

deoarece:

$$T_O(\lambda S) = \{\lambda \, \vec{\mathcal{R}} \, , \lambda \, \vec{\mathcal{M}}_O \}. \qquad (1.43)$$

Un caz particular important este pentru $\lambda = -1$ când avem:

$$T_O(-S) = -T_O(S) \, . \qquad (1.44)$$

2. Fie $(S_1) = \{\vec{F}_1^{(1)}, \vec{F}_2^{(1)}, ..., \vec{F}_n^{(1)}\}$ şi $(S_2) = \{\vec{F}_1^{(2)}, \vec{F}_2^{(2)}, ..., \vec{F}_n^{(2)}\}$ două sisteme de vectori alunecători sau legaţi. Se defineşte sistemul:

$(S) = \{\vec{F}_1^{(1)}, \vec{F}_2^{(1)}, ..., \vec{F}_n^{(1)}, \vec{F}_1^{(2)}, \vec{F}_2^{(2)}, ..., \vec{F}_n^{(2)}\}$ ca suma celor două sisteme. Torsorul sistemului (S) în polul O este egal cu suma torsorilor celor două sisteme

calculate în acelaşi pol.

$$T_O(S) = T_O(S_1 + S_2) = T_O(S_1) + T_O(S_2), \tag{1.45}$$

deoarece:

$$T_O(S_1 + S_2) = \{ \vec{\mathcal{R}}^{(1)} + \vec{\mathcal{R}}^{(2)}, \vec{\mathcal{M}}_0^{(1)} + \vec{\mathcal{M}}_0^{(2)} \}. \tag{1.46}$$

3. Proprietățile anterioare se pot generaliza în sensul că, dacă λ_1 şi λ_2 sunt scalari şi (S_1) şi (S_2) sunt două sisteme de vectori alunecători sau legați, atunci:

$$T_O(\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2) = \lambda_1 T_O(S_1) + \lambda_2 T_O(S_2). \tag{1.47}$$

4. Vectorul moment rezultant al unui sistem de vectori alunecători sau legați (S) se schimbă la schimbarea polului din O în O', după legea:

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{\mathcal{M}}_{O'} + \overrightarrow{OO'} \times \vec{\mathcal{R}}. \tag{1.48}$$

Relația (1.9) se scrie pentru un vector $\vec{F}_i$ al sistemului S, sub forma:

$$\vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{M}_{O'}(\vec{F}_i) + \overrightarrow{OO'} \times \vec{F}_i, \quad i = 1,2,...,n. \tag{1.49}$$

Vectorul moment rezultant în polul O este:

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{i=n} [\vec{M}_{O'}(\vec{F}_i) + \overrightarrow{OO'} \times \vec{F}_i] =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} \vec{M}_{O'}(\vec{F}_i) + \overrightarrow{OO'} \times \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i = \vec{\mathcal{M}}_{O'} + \overrightarrow{OO'} \times \vec{\mathcal{R}}. \tag{1.50}$$

În general $\vec{\mathcal{M}}_O \neq \vec{\mathcal{M}}_{O'}$ fapt care arată că momentul rezultant al unui sistem de vectori este în general un vector legat deoarece se modifică la schimbarea polului după legea (1.48). Momentul rezultant nu se schimbă la schimbarea polului în următoarele două situații:

a) când vectorul $\overrightarrow{OO'}$ este paralel cu vectorul rezultant;

b) când vectorul rezultant $\vec{\mathcal{R}} = 0$. În această situație $\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{\mathcal{M}}_{O'}$ oricare ar fi polul O', deci, la sistemele care au vectorul rezultant nul,

vectorul moment rezultant este invariant la schimbarea polului deci este un vector liber.

5. Dacă într-un pol O torsorul unui sistem (S) este nul, atunci el este nul în orice pol.

$$T_O(S) = \{0,0\} \Rightarrow T_{O'}(S) = \{0,0\} \text{ oricare ar fi } O'. \qquad (1.51)$$

Această proprietate este o consecinţă imediată a proprietăţii anterioare.

6. Produsul scalar dintre componentele torsorului este un invariant la schimbarea polului:

$$\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_{O'} \text{ oricare ar fi polul } O'. \qquad (1.52)$$

Această proprietate se demonstrează pe baza relaţiei (1.48):

$$\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{\mathcal{R}}\,(\vec{\mathcal{M}}_{O'} + \overrightarrow{OO'} \times \vec{\mathcal{R}}) = \vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_{O'} + \vec{\mathcal{R}}\,(\overrightarrow{OO'} \times \vec{\mathcal{R}}) = \vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_{O'} \qquad (1.53)$$

deoarece produsul mixt $\vec{\mathcal{R}}\,(\overrightarrow{OO'} \times \vec{\mathcal{R}}) = 0$.

Expresia analitică a acestui produs scalar, atunci când vectorii sunt exprimaţi în raport cu un reper $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, este:

$$\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O = \mathcal{R}_x\,\mathcal{M}_x + \mathcal{R}_y\,\mathcal{M}_y + \mathcal{R}_z\,\mathcal{M}_z. \qquad (1.54)$$

El se mai numeşte **trinom invariant** sau **scalarul torsorului** şi joacă un rol important în problemele de reducere a sistemelor de vectori alunecători.

7. Proiecţia vectorului moment rezultant, notat $\vec{\mathcal{M}}_R$, pe direcţia vectorului rezultant $\vec{\mathcal{R}} \neq 0$ este aceeaşi în orice punct din spaţiu, deci este invariantă la schimbarea polului (fig. 1.9).

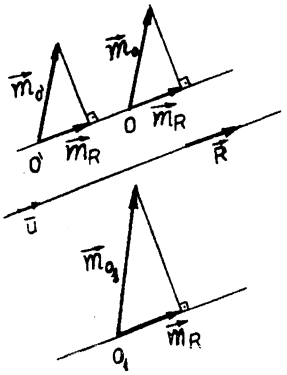


fig. 1.9.

Fie $\vec{u}$ versorul vectorului rezultant $\vec{\mathcal{R}}$, adică:

$$\vec{u} = \frac{\vec{\mathcal{R}}}{|\vec{\mathcal{R}}|}. \qquad (1.55)$$

Mărimea algebrică a proiecției vectorului moment rezultant pe direcția lui $\vec{\mathcal{R}}$ se calculează înmulțind scalar vectorul moment rezultant cu versorul lui $\vec{\mathcal{R}}$:

$$\mathcal{M}_R = \vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{u} = \frac{\vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{\mathcal{R}}}{\left|\vec{\mathcal{R}}\right|}, \tag{1.56}$$

iar vectorul proiecție se obține înmulțind mărimea algebrică a proiecției cu versorul direcției pe care se face proiecția, adică tot $\vec{u}$:

$$\vec{\mathcal{M}}_R = \frac{\vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{\mathcal{R}}}{\left|\vec{\mathcal{R}}\right|} \cdot \vec{u} = \frac{\vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{\mathcal{R}}}{\left|\vec{\mathcal{R}}\right|} \cdot \frac{\vec{\mathcal{R}}}{\left|\vec{\mathcal{R}}\right|} = \frac{\vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \cdot \vec{\mathcal{R}}. \tag{1.57}$$

Deoarece produsul $\vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{\mathcal{R}}$ şi vectorul rezultant $\vec{\mathcal{R}}$ sunt invarianți la schimbarea polului, rezultă că vectorul $\vec{\mathcal{M}}_R$ este şi el invariant la schimbarea polului.

8. Torsorul unui sistem format din doi vectori alunecători sau legați care au aceeaşi mărime, aceeaşi dreaptă suport şi sensuri opuse este nul în orice pol (fig. 1.10). Acest sistem se mai numeşte sistem de vectori direct opuşi.

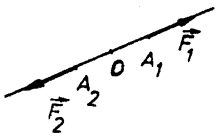


fig. 1.10.

Fie sistemul $(S) = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2\}$ care îndeplineşte condițiile din enunț. Se consideră un pol O pe dreapta suport (fig. 1.10). Componentele torsorului sunt:

$$\vec{\mathcal{R}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0,$$

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_1) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_2) = 0. \tag{1.58}$$

Vectorul moment rezultant este nul deoarece suportul vectorilor trece prin pol. Rezultă că torsorul este nul în polul O şi, prin urmare, conform proprietății numărul cinci, este nul în orice pol.

Observație: În cazul în care asupra unui punct material acționează un

sistem de vectori direct opuşi, el nu are nici un efect asupra mişcării sau echilibrului acelui punct. Dacă fiecare dintre cele două forţe ale unui astfel de sistem acţionează asupra câte unui punct material, atunci ele imprimă mişcări celor două puncte materiale, deşi torsorul sistemului este nul.

În cazul în care două forţe care formează un sistem de vectori direct opuşi acţionează asupra unui **solid rigid**, s-a constatat că aceste forţe nu au nici un efect mecanic asupra corpului, adică dacă solidul rigid era în repaus sau în mişcare, adăugarea sau suprimarea unui astfel de sistem de forţe nu modifică starea de repaus sau modul de mişcare ale corpului. Pe baza acestei ipoteze se poate arăta că forţele care acţionează asupra unui solid rigid sunt vectori alunecători, ipoteza de rigiditate fiind esenţială. Pentru a demonstra acest lucru, considerăm un solid rigid asupra căruia acţionează o forţă $\vec{F}$ aplicată într-un punct A (fig. 1.11a). Se aplică într-un punct oarecare B de pe suportul lui $\vec{F}$ un sistem $\{\vec{F},-\vec{F}\}$, operaţie care, conform ipotezei, nu are nici un efect asupra rigidului (fig. 1.11.b). Se suprimă apoi sistemul format din vectorul $\vec{F}$ din A şi vectorul $-\vec{F}$ din B, operaţie care nici ea, conform ipotezei, nu are vreun efect asupra rigidului (fig. 1.11.c). Rezultă că forţa $\vec{F}$ aplicată în punctul B are acelaşi efect ca şi forţa $\vec{F}$ aplicată în punctul A. Rezultă faptul că **forţele care acţionează asupra unui solid rigid pot fi reprezentate prin vectori alunecători**. Această remarcă se aplică şi în cazul sistemelor rigidizate de solide rigide.

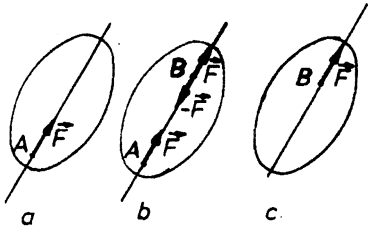
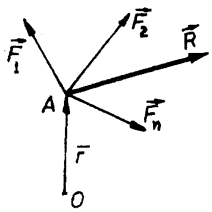


fig. 1.11.

1.5.3. Teorema lui Varignon

Un caz particular important este acela al unui sistem de vectori concurenți format fie din vectori legați aplicați în același punct A, fie din vectori alunecători cu suporturile concurente într-un punct A (fig. 1.12). Pentru un astfel de sistem, torsorul într-un pol O este:



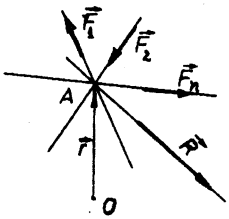


fig. 1.12.

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i, \\ \vec{\mathcal{M}}_O = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{M}_O(\vec{F}_i). \end{cases} \quad (1.59)$$

În condițiile acestui caz particular, vectorul moment rezultant capătă forma:

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{r} \times \vec{F}_i = \vec{r} \times \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i = \vec{r} \times \vec{\mathcal{R}} = \vec{M}_O(\vec{\mathcal{R}}). \quad (1.60)$$

rezultat care poartă denumirea de **teorema lui Varignon** și care se enunță astfel: vectorul moment rezultant, calculat în raport cu un pol O, al unui sistem de vectori legați concurenți într-un punct A sau al unui sistem de vectori alunecători cu suporturile concurente într-un punct A, este egal cu momentul față de polul O al vectorului rezultant aplicat în același punct A sau respectiv cu suportul trecând prin punctul A:

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{M}_O(\vec{\mathcal{R}}) = \overrightarrow{OA} \times \vec{\mathcal{R}}. \quad (1.61)$$

Observații:

1. Pentru un astfel de sistem de vectori, rezultă că scalarul torsorului este nul:

$$\vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{\mathcal{R}} = 0, \quad (1.62)$$

chiar dacă $\vec{\mathcal{M}}_O \neq 0$ şi $\vec{\mathcal{R}} \neq 0$ deoarece $\vec{\mathcal{M}}_O$ este perpendicular pe $\vec{\mathcal{R}}$.

2. Dacă un astfel de sistem acționează asupra unui punct material A, atunci vectorii sistemului se pot compune după regula paralelogramului, obținându-se un vector rezultant $\vec{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i$ aplicat în punctul A şi numit **rezultantă** deoarece are acelaşi efect asupra punctului ca şi sistemul inițial. Teorema lui Varignon se poate enunța acum astfel: vectorul moment rezultant față de un pol O al unui sistem de vectori concurenți într-un punct A este egal cu momentul rezultantei calculat în raport cu acelaşi pol O şi aplicată în punctul A.

1.5.4. Axa centrală a unui sistem de vectori alunecători

Fie $(S) = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\}$ un sistem de vectori alunecători având într-un pol O torsorul $T_O = \{\vec{\mathcal{R}}, \vec{\mathcal{M}}_O\}$ cu $\vec{\mathcal{R}} \neq 0$. Aşa cum s-a arătat în cadrul proprietății numărului şapte a torsorului, vectorul moment rezultant $\vec{\mathcal{R}}$ şi produsul scalar $\vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{\mathcal{R}}$ sunt invarianți la schimbarea polului. Primul este un invariant vectorial:

$$\vec{I}_1 = \vec{\mathcal{R}}, \tag{1.63}$$

iar al doilea este un invariant scalar:

$$I_2 = \vec{\mathcal{M}}_O \, \vec{\mathcal{R}}. \tag{1.64}$$

Dacă se descompune vectorul moment rezultant după o direcție coliniară cu $\vec{\mathcal{R}}$, componentă care se notează cu $\vec{\mathcal{M}}_R$, şi după o direcție normală pe direcția lui $\vec{\mathcal{R}}$, componentă care se notează cu $\vec{\mathcal{M}}_{On}$ (fig. 1.13), rezultă:

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{\mathcal{M}}_R + \vec{\mathcal{M}}_{On} \text{ cu}$$

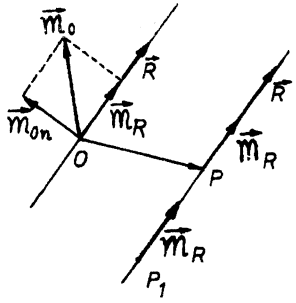


fig. 1.13.

$$\left|\vec{\mathcal{M}}_O\right| = \sqrt{\mathcal{M}_R^{\,2} + \mathcal{M}_{On}^{\,2}} \geq \left|\vec{\mathcal{M}}_R\right|. \qquad (1.65)$$

Deoarece componenta $\vec{\mathcal{M}}_R$ este invariantă la schimbarea polului iar vectorul moment rezultant se modifică la schimbarea polului (1.48), rezultă că numai componenta normală $\vec{\mathcal{M}}_{On}$ se modifică la schimbarea polului. Se poate pune deci problema de a găsi puncte P din spaţiu în care, dacă sunt luate ca pol, componentele torsorului să fie coliniare, adică componenta normală să se anuleze: $\vec{\mathcal{M}}_{Pn} = 0$, iar vectorul moment rezultant să fie egal numai cu componenta paralelă cu direcţia lui $\vec{\mathcal{R}}$, $\vec{\mathcal{M}}_P = \vec{\mathcal{M}}_R$ (fig. 1.13).

În aceste puncte, dacă există, vectorul moment rezultant $\vec{\mathcal{M}}_P$ are valoarea minimă, motiv pentru care torsorul sistemului în polul P, $T_P(S)$, se mai numeşte şi **torsorul minimal**. Deci:

$$T_{min}(S) = T_P(S) = \{\vec{\mathcal{R}}, \vec{\mathcal{M}}_{min}\}, \qquad (1.66)$$

unde:

$$\vec{\mathcal{M}}_{min} = \vec{\mathcal{M}}_R = \frac{\vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2}\,\vec{\mathcal{R}} = \frac{I_2}{\left|\vec{I}_1\right|^2} \cdot \vec{I}_1, \qquad (1.67)$$

având mărimea algebrică:

$$\frac{\vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{\mathcal{R}}}{\left|\vec{\mathcal{R}}\right|} = \frac{I_2}{\left|\vec{I}_1\right|}. \qquad (1.68)$$

Conform proprietăţii numărul patru, dacă există un punct P în care să aibă loc cele arătate mai sus, atunci există o infinitate de astfel de puncte situate pe o dreaptă paralelă cu $\vec{\mathcal{R}}$ şi care trece prin P.

Pentru astfel de puncte P, se poate scrie relaţia:

$$\vec{\mathcal{M}}_P = \vec{\mathcal{M}}_O - \overrightarrow{OP} \times \vec{\mathcal{R}} . \tag{1.69}$$

Se amplifică egalitatea înmulţind vectorial la stânga cu $\vec{\mathcal{R}}$:

$$\vec{\mathcal{R}} \times \vec{\mathcal{M}}_P = \vec{\mathcal{R}} \times (\vec{\mathcal{M}}_O - \overrightarrow{OP} \times \vec{\mathcal{R}}). \tag{1.70}$$

Deoarece $\vec{\mathcal{R}}$ şi $\vec{\mathcal{M}}_P$ sunt coliniare, produsul vectorial este zero şi rezultă:

$$\vec{\mathcal{R}} \times \vec{\mathcal{M}}_O - \vec{\mathcal{R}} \times (\overrightarrow{OP} \times \vec{\mathcal{R}}) = 0, \tag{1.71}$$

de unde:

$$\vec{\mathcal{R}} \times \vec{\mathcal{M}}_O = \mathcal{R}^2 \overrightarrow{OP} - (\vec{\mathcal{R}} \cdot \overrightarrow{OP}) \vec{\mathcal{R}} . \tag{1.72}$$

Se poate acum exprima vectorul de poziţie al punctului P:

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{\mathcal{R}} \times \vec{\mathcal{M}}_O}{\mathcal{R}^2} + \frac{\vec{\mathcal{R}} \cdot \overrightarrow{OP}}{\mathcal{R}^2} \vec{\mathcal{R}} . \tag{1.73}$$

Notând:

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} , \ \frac{\vec{\mathcal{R}} \cdot \overrightarrow{OP}}{\mathcal{R}^2} = \lambda \ \text{şi} \ \frac{\vec{\mathcal{R}} \times \vec{\mathcal{M}}_O}{\mathcal{R}^2} = \vec{r}_{P_0} , \tag{1.74}$$

în care λ este un parametru, relaţia (1.73) se scrie:

$$\vec{r} = \vec{r}_{P_0} + \lambda \vec{\mathcal{R}} = \frac{\vec{\mathcal{R}} \times \vec{\mathcal{M}}_O}{\mathcal{R}^2} + \lambda \vec{\mathcal{R}} . \tag{1.75}$$

care reprezintă ecuaţia vectorială a unei drepte ce trece prin punctul P_0 determinat de vectorul de poziţie $\vec{r}_{P_0}$ şi care este paralelă cu $\vec{\mathcal{R}}$. Această dreaptă se numeşte **axa centrală a sistemului (S) de vectori alunecători**. Ea poate fi definită ca locul geometric al punctelor P din spaţiu în care, dacă sunt luate ca poli, vectorul rezultant şi vectorul moment rezultant sunt coliniari iar torsorul este minimal.

Coordonatele punctului P_0 prin care trece axa centrală sunt obţinute din expresia analitică a relaţiei (1.74):

$$x_{P_0}\vec{i}+y_{P_0}\vec{j}+z_{P_0}\vec{k}=\frac{1}{\mathcal{R}^2}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \mathcal{R}_x & \mathcal{R}_y & \mathcal{R}_z\\ \mathcal{M}_x & \mathcal{M}_y & \mathcal{M}_z\end{vmatrix}. \tag{1.76}$$

Ecuația parametrică a axei centrale în raport cu un reper cartezian $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ este:

$$x=x_{P_0}+\lambda\mathcal{R}_x;\ y=y_{P_0}+\lambda\mathcal{R}_y;\ z=z_{P_0}+\lambda\mathcal{R}_z. \tag{1.77}$$

Ecuațiile canonice ale axei centrale se deduc din relațiile anterioare şi au forma:

$$\frac{x-x_{P_0}}{\mathcal{R}_x}=\frac{y-y_{P_0}}{\mathcal{R}_y}=\frac{z-z_{P_0}}{\mathcal{R}_z}. \tag{1.78}$$

Observații:

1. În cazul în care un sistem de vectori alunecători are vectorul rezultant nul, $\vec{\mathcal{R}}=0$, noțiunea de axă centrală nu are sens.

2. În cazul sistemelor de vectori alunecători la care $\vec{\mathcal{R}}\neq 0$ dar $\vec{\mathcal{R}}\cdot\vec{\mathcal{M}}_O=0$, rezultă că $\vec{\mathcal{M}}_{min}=\vec{\mathcal{M}}_R=0$, ceea ce face ca noțiunea de paralelism între vectorii $\vec{\mathcal{R}}$ şi $\vec{\mathcal{M}}_{min}=0$ să nu aibă sens. Axa centrală este atunci definită ca locul geometric al punctelor P din spațiu în care, atunci când sunt luate ca poli, vectorul moment rezultant este nul, adică $T_{min}=\{\vec{\mathcal{R}},\vec{0}\}$.

3. O altă formă a ecuațiilor axei centrale se poate obține din relația de coliniaritate dintre momentul rezultant $\vec{\mathcal{M}}_P$ şi vectorul rezultant $\vec{\mathcal{R}}$ scrisă sub forma:

$$\vec{\mathcal{M}}_P=\lambda\,\vec{\mathcal{R}}, \tag{1.79}$$

în care λ este un parametru scalar. Notând cu x, y, z, coordonatele punctului P şi înlocuind (1.79) în (1.69) se obține:

$$\frac{\mathcal{M}_{Ox}-(y\mathcal{R}_z-z\mathcal{R}_y)}{\mathcal{R}_x}=\frac{\mathcal{M}_{Oy}-(z\mathcal{R}_x-x\mathcal{R}_z)}{\mathcal{R}_y}=\frac{\mathcal{M}_{Oz}-(x\mathcal{R}_y-y\mathcal{R}_x)}{\mathcal{R}_z}, \tag{1.80}$$

care este o altă formă a ecuației axei centrale.

4. Vectorul de poziție $\vec{r}_{P_0}$ al punctului P_0 dat de (1.74) este perpendicular pe axa centrală, iar modulul său este chiar distanța de la polul O la axa centrală.

Din relația de definiție (1.74) a lui $\vec{r}_{P_0}$, rezultă că acest vector este perpendicular pe vectorul $\vec{\mathcal{R}}$ care, la rândul său, este paralel cu axa centrală. Rezultă că $\vec{r}_{P_0}$ este perpendicular pe axa centrală, iar modulul său este lungimea perpendicularei coborâtă din polul O pe această axă.

5. Poziția axei centrale a unui sistem de vectori alunecători este independentă de pol.

Presupunem că la schimbarea polului din O în O′, axa centrală își modifică poziția (fig. 1.14). În cazul schimbării polului, vectorul $\vec{r}_{P_0}$ este dat de:

$$\vec{r}_{P_0}=\frac{\vec{\mathcal{R}}\times\vec{\mathcal{M}}_O}{\mathcal{R}^2}=\frac{\vec{\mathcal{R}}\times(\vec{\mathcal{M}}_{O'}+\overrightarrow{OO'}\times\vec{\mathcal{R}})}{\mathcal{R}^2}=\frac{\vec{\mathcal{R}}\times\vec{\mathcal{M}}_{O'}}{\mathcal{R}^2}+\frac{\vec{\mathcal{R}}\times(\overrightarrow{OO'}\times\vec{\mathcal{R}})}{\mathcal{R}^2}=$$

$$=\frac{\vec{\mathcal{R}}\times\vec{\mathcal{M}}_{O'}}{\mathcal{R}^2}+\frac{\mathcal{R}^2\overrightarrow{OO'}}{\mathcal{R}^2}-\frac{(\vec{\mathcal{R}}\overrightarrow{OO'})\vec{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2}=\vec{r}_{P_0^*}+\overrightarrow{OO'}+\mu\,\vec{\mathcal{R}}, \qquad (1.81)$$

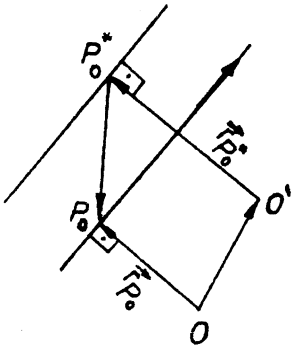


fig. 1.14.

în care $\vec{r}_{P_0^*}=\dfrac{\vec{\mathcal{R}}\times\vec{\mathcal{M}}_{O'}}{\mathcal{R}^2}$ este vectorul de poziție al unui punct de pe axa centrală corespunzătoare polului O′ iar μ este un parametru scalar. Din figura (1.14) se deduce relația vectorială:

$$\vec{r}_{P_0}=\overrightarrow{OO'}+\vec{r}_{P_0^*}+\overrightarrow{P_0^*P}. \qquad (1.82)$$

Comparând relațiile (1.81) cu (1.82), rezultă egalitatea:

$$\overrightarrow{P_0^*P}=\mu\,\vec{\mathcal{R}}. \qquad (1.83)$$

Această relație arată că vectorul $\overrightarrow{P_0^*P}$ trebuie să fie paralel cu vectorul $\vec{\mathcal{R}}$ și să treacă prin punctul P_0 aparținând axei centrale corespunzătoare polului O, deci singura posibilitate este ca $\overrightarrow{P_0^*P}$ să fie coliniar cu această axă centrală, ceea ce arată că, de fapt, și punctul P_0^* trebuie să se găsească pe ea adică cele două axe centrale coincid.

6. Formulele (1.32) și (1.75) se aseamănă foarte mult ca aspect, numai că, în cazul suportului unui vector alunecător, momentul care intervine este momentul vectorului, iar în cazul axei centrale vectorul moment rezultant nu este, în general, momentul vectorului rezultant.

1.5.5. Echivalența sistemelor de vectori alunecători. Operații elementare de echivalență. Teorema de echivalență

Fie $(S)=\{\vec{F}_1,\vec{F}_2,...,\vec{F}_n\}$ un sistem de vectori **alunecători**; de exemplu un sistem de forțe care acționează asupra unui solid rigid.

Se constată că există anumite operații numite **operații elementare de echivalență** care efectuate asupra vectorilor sistemului (S), nu-i modifică torsorul calculat într-un pol O. Aceste operații sunt:

1. Alunecarea unui vector pe suportul său. Faptul că această operație nu modifică torsorul, rezultă din definiția momentului unui vector alunecător.
2. Înlocuirea a doi vectori concurenți cu rezultanta lor prin punctul de concurență sau descompunerea unui vector în două componente aplicate într-un punct de pe suportul acelui vector. Nemodificarea torsorului prin această operație rezultă din teorema lui Varignon și din principiul paralelogramului.

3. Adăugarea la sistemul (S) sau suprimarea din sistemul (S) de pe rechi de vectori coliniari, egali în modul şi de sensuri contrare Faptul că torsorul nu se modifică prin această operaţie rezultă dii aceea că torsorul unui sistem de vectori direct opuşi este nul îi orice pol.

Definiţie: Două sisteme de vectori alunecători (S_1) şi (S_2) se numesc echivalente dacă se obţin unul din altul prin operaţii elementare de echivalenţă. Se notează $(S_1) \sim (S_2)$.

Observaţii:

1. Prin aplicarea numai a primei operaţii elementare de echivalenţă se obţine acelaşi sistem de vectori.

2. Dacă (S_1) este un sistem de forţe care acţionează asupra unui solid rigid iar (S_2) este un sistem echivalent cu el, atunci cele două sisteme au acelaşi efect. Acest lucru este justificat de faptul că nici una dintre operaţiile elementare de echivalenţă nu modifică efectul unui sistem de forţe ce acţionează asupra unui solid rigid.

3. Toate sistemele echivalente formează o clasă de echivalenţă.

O relaţie de echivalenţă este caracterizată de următoarele trei proprietăţi:

a) reflexivitate: $(S) \sim (S)$;
b) simetrie: dacă $(S_1) \sim (S_2)$ atunci $(S_2) \sim (S_1)$;
c) tranzitivitate: dacă $(S_1) \sim (S_2)$ şi $(S_2) \sim (S_3)$, atunci: $(S_1) \sim (S_3)$.

În general, sistemele de forţe care acţionează asupra unui solid rigid conţin multe elemente şi efectul lor este greu de apreciat. De aceea, se pune problema înlocuirii unui sistem de forţe $(S) = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\}$ cu cel mai simplu sistem echivalent care să aibă acelaşi efect asupra solidului rigid. În vederea rezolvării acestei probleme, se poate demonstra teorema următoare:

Orice sistem $(S_1)=\{\vec{F}_1,\vec{F}_2,...,\vec{F}_n\}$ de vectori alunecători se poate transforma, numai prin operații elementare de echivalență, într-un sistem (S_2) format numai din doi vectori, $(S_2)=\{\vec{V}_1,\vec{V}_2\}$.

Teorema afirmă deci că orice sistem de vectori alunecători este echivalent cu un sistem format doar din doi vectori.

Tot în același scop se va prezenta teorema de echivalență, operație pregătită de lema care urmează:

Lemă: Un sistem (S), care are într-un pol torsorul nul, poate fi suprimat prin operații elementare de echivalență.

Pentru demonstrarea lemei, se consideră un sistem $(S)=\{\vec{F}_1,\vec{F}_2,...,\vec{F}_n\}$ de vectori alunecători având torsorul nul într-un pol O:

$$\vec{\mathcal{R}}=\sum_{i=1}^{i=n}(\vec{F}_i)=0,\ \vec{\mathcal{M}}_O=\sum_{i=1}^{i=n}\vec{M}_O(\vec{F}_i)=0. \tag{1.84}$$

Teorema anterioară afirmă că acest sistem este echivalent cu un sistem simplu $S^*=\{\vec{V}_1,\vec{V}_2\}$ format numai din doi vectori, care are același torsor în polul O:

$$\begin{cases}\vec{\mathcal{R}}=\vec{V}_1+\vec{V}_2=0,\\ \vec{\mathcal{M}}_O=\vec{M}_O(\vec{V}_1)+\vec{M}_O(\vec{V}_2)=0.\end{cases} \tag{1.85}$$

Din prima relație rezultă că $\vec{V}_1=-\vec{V}_2$, deci cei doi vectori sunt egali ca mărime, paraleli și de sensuri opuse. Cea de a doua relație arată că $\vec{M}_O(\vec{V}_1)=-\vec{M}_O(\vec{V}_2)$, adică faptul că cei doi vectori au același suport. Rezultă că sistemul (S^*) este format din cei doi vectori direct opuși și conform celei de a treia operații elementare de echivalență, el poate fi suprimat, obținându-se un sistem echivalent fără nici un vector, ceea ce demonstrează lema.

Acum se poate demonstra teorema de echivalență care urmează.

Două sisteme (S_1) şi (S_2) sunt echivalente dacă şi numai dacă ele au acelaşi torsor într-un pol arbitrar.

Presupunem că cele două sisteme au acelaşi torsor, într-un pol arbitrar O, adică:

$$T_O(S_1) = T_O(S_2). \tag{1.86}$$

Se consideră un nou sistem (S^*) format din vectorii sistemului (S_1), vectorii sistemului (S_2) şi vectorii sistemului $(-S_2)$. Sistemul (S^*) este echivalent cu sistemul (S_1) deoarece a fost obţinut din acesta prin aplicarea operaţiei elementare de echivalenţă numărul trei:

$$(S_1) \sim (S^*). \tag{1.87}$$

Pe de altă parte, torsorul sistemului format din vectorii sistemului (S_1) şi vectorii sistemului $(-S_2)$ este nul:

$$T_O[(S_1) + (-S_2)] = T_O(S_1) + T_O(-S_2) = T_O(S_1) - T_O(S_2) = 0, \tag{1.88}$$

deci, conform lemei, poate fi suprimat din (S^*). Prin urmare, în sistemul (S^*) rămân vectorii sistemului (S_2), deci:

$$(S^*) \sim (S_2). \tag{1.89}$$

Din (1.87) şi (1.89), prin tranzitivitate, rezultă:

$$(S_1) \sim (S_2). \tag{1.90}$$

Reciproc, dacă (S_1) este echivalent cu (S_2), atunci înseamnă că sistemele s-au obţinut unul din altul prin aplicarea operaţiilor elementare de echivalenţă care, aşa cum s-a arătat, nu modifică torsorul. Rezultă că ele au acelaşi torsor.

1.5.6. Sisteme simple de vectori alunecători

Având în vedere că orice sistem de vectori alunecători poate fi transformat într-un sistem echivalent format numai din doi vectori, s-a

constatat că aceste sisteme simple pot fi numai de patru tipuri. Aceste patru tipuri de sisteme simple de vectori vor fi prezentate în continuare. Pentru a putea preciza cu care dintre ele este echivalent un sistem dat de vectori alunecători, trebuie să se precizeze, în fiecare caz, poziția față de zero a vectorului rezultant, a vectorului moment rezultant şi a scalarului torsorului. Cele trei mărimi poartă numele de caracteristicile sistemului.

I. Sistemul echivalent cu zero

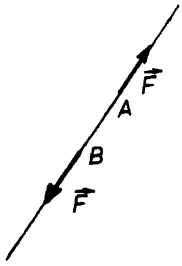


fig. 1.15.

Acest sistem simplu este format din doi vectori alunecători direct opuşi (fig. 1.15). Caracteristicile acestui sistem în orice pol sunt:

$$\boxed{\vec{\mathcal{R}} = 0,\ \vec{\mathcal{M}}_O = 0,\ \vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O = 0.} \qquad (1.91)$$

Sistemul este numit echivalent cu zero deoarece are toate caracteristicile zero, iar el poate fi adăugat sau suprimat prin operația elementară de echivalență numărul trei. Deoarece $\vec{\mathcal{R}} = 0$, nu se pune problema axei centrale.

II. Cuplu de vectori

Acest sistem simplu este format din doi vectori situați pe suporturi paralele distincte, egali în modul şi de sensuri contrare. Se notează cu $(\vec{F},-\vec{F})$ (fig. 1.16). Planul determinat de suporturile celor doi vectori se numeşte **planul cuplului** (P), iar distanța dintre dreptele suport se numeşte **brațul cuplului**. Deoarece $\vec{\mathcal{R}} = 0$, momentul rezultant are aceeaşi valoare în orice pol, deci este vector liber, şi este denumit **momentul cuplului** fiind notat $\vec{M}_{cup}$. El se poate calcula în orice pol

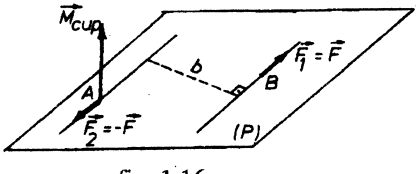


fig. 1.16.

particular, de exemplu în A:

$$\vec{M}_{cup} = \vec{\mathcal{M}}_A = \vec{M}_A(\vec{F}_1) + \vec{M}_A(\vec{F}_2) = \overrightarrow{AB} \times \vec{F} \neq 0 . \qquad (1.92)$$

Momentul cuplului este un vector liber, perpendicular pe planul cuplului, sensul este obținut folosind regula burghiului drept, iar modulul este:

$$\left|\vec{M}_{cup}\right| = \left|\vec{M}_A(\vec{F}_1)\right| = b\left|\vec{F}\right| .$$

Caracteristicile unui cuplu în orice pol O sunt:

$$\boxed{\vec{\mathcal{R}} = 0,\ \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{M}_{cup} \neq 0,\ \vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O = 0.} \qquad (1.93)$$

Deoarece vectorul rezultant este nul, nu se pune problema axei centrale.

Prin urmare **un cuplu este caracterizat numai de vectorul moment al cuplului care este un vector liber.**

Pe baza teoremei de echivalență, se poate deduce că două cupluri sunt echivalente dacă au același moment întrucât vectorul rezultant este nul. Un cuplu $(\vec{F},-\vec{F})$ cu brațul b este echivalent cu un cuplu $(\vec{F}^*,-\vec{F}^*)$ cu brațul b^* dacă $\vec{M}_{cup} = \vec{M}^*_{cup}$. Aceasta înseamnă că cele două cupluri trebuie să fie situate în același plan sau în plane paralele, trebuie să fie la fel orientate și să aibă același modul ($\left|\vec{F}\right| \cdot b = \left|\vec{F}^*\right| \cdot b^*$) (fig. 1.17).

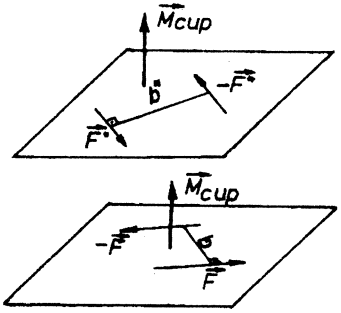


fig. 1.17.

Observații:

1. Dacă avem un sistem de n cupluri situate în plane oarecare (P_1), (P_2),..., (P_n) și având momentele $\vec{M}_{cup_1}$, $\vec{M}_{cup_2}$,..., $\vec{M}_{cup_n}$, vectorul rezultant al sistemului este nul iar vectorul moment rezultant al sistemului este egal cu suma momentelor cuplurilor:

$$\vec{\mathcal{R}} = 0,\ \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{M}_{cup_1} + \vec{M}_{cup_2} + ... + \vec{M}_{cup_n} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{M}_{cup_i} . \qquad (1.94)$$

Dacă $\vec{\mathcal{M}}_O = 0$, sistemul este echivalent cu zero, iar dacă $\vec{\mathcal{M}}_O \neq 0$ sistemul este echivalent cu un cuplu.

2. În unele situații, momentul cuplului se reprezintă sub forma unei săgeți circulare situate în planul (P) (fig. 1.18.). Sensul ei coincide cu sensul de rotație al cuplului, putându-se deduce, cu regula burghiului drept, direcția și sensul vectorului moment. Modulul este precizat în datele problemei.

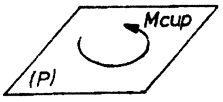


fig. 1.18.

III. Sistemul echivalent cu un vector unic

Acest sistem simplu este format din doi vectori cu suporturile concurente într-un punct A (fig. 1.19).

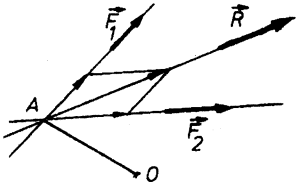


fig. 1.19.

Fie sistemul $(S) = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2\}$ un astfel de sistem cu suporturile vectorilor concurente în punctul A. Aplicând operația elementară de echivalență numărul doi, se înlocuiește sistemul (S) cu sistemul echivalent format dintr-un singur vector $\vec{\mathcal{R}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \neq 0$, cu suportul trecând prin punctul de concurență A. Acest vector rezultant se mai numește **rezultanta sistemului**. Vectorul moment rezultant în polul O se calculează aplicând teorema lui Varignon:

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{M}_O(\vec{\mathcal{R}}) = \overrightarrow{OA} \times \vec{\mathcal{R}}. \qquad (1.95)$$

Din cele de mai sus, rezultă că sistemul este echivalent cu un vector unic și anume rezultanta sistemului cu suportul trecând prin punctul de concurență. Caracteristicile sistemului sunt:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{\mathcal{R}} \neq 0, \\ \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{M}_O(\vec{\mathcal{R}}) \text{ cu cazurile: a) } \vec{\mathcal{M}}_O = 0 \text{ dacă } O \in \text{ suportului lui } \vec{\mathcal{R}}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{b) } \vec{\mathcal{M}}_O \neq 0 \text{ dacă } O \notin \text{ suportului lui } \vec{\mathcal{R}}, \\ \vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O = 0. \end{array}} \qquad (1.96)$$

Trinomul invariant este nul, deoarece este dat de un produs mixt conținând doi vectori identici:

$$\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{\mathcal{R}} \cdot (\overrightarrow{OA} \times \vec{\mathcal{R}}) = 0. \qquad (1.97)$$

Deoarece $\vec{\mathcal{R}} \neq 0$ şi $\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O = 0$, se pune problema axei centrale ca loc geometric al punctelor în care, dacă sunt luate ca pol, vectorul moment rezultant este nul. Cum momentul rezultant este nul numai în poli aparținând suportului vectorului rezultant (1.96), rezultă că axa centrală este chiar suportul lui $\vec{\mathcal{R}}$.

În concluzie, sistemul este echivalent cu un vector unic $\vec{\mathcal{R}} \neq 0$ numit rezultantă, situat pe axa centrală care coincide cu suportul acestui vector unic.

IV. Sistemul echivalent cu un vector şi un cuplu

Acest sistem este format din doi vectori $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ având suporturile două drepte oarecare în spațiu (fig. 1.20.). El mai este denumit şi torsor propriu-zis sau torsor veritabil. Pentru a-i stabili caracteristicile într-un pol oarecare O, se calculează mai întâi aceste caracteristici în polul O_1 situat pe suportul lui $\vec{F}_1$. În acest pol, componentele torsorului sunt:

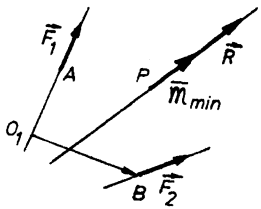


fig. 1.20.

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{R}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \neq 0, \\ \vec{\mathcal{M}}_{O_1} = \vec{M}_{O_1}(\vec{F}_1) + \vec{M}_{O_1}(\vec{F}_2) = \overrightarrow{O_1B} \times \vec{F}_2 \neq 0, \\ \vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_{O_1} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot (\overrightarrow{O_1B} \times \vec{F}_2) = \vec{F}_1 \cdot (\overrightarrow{O_1B} \times \vec{F}_2) + \vec{F}_2 \cdot (\overrightarrow{O_1B} \times \vec{F}_2) = \\ = \vec{F}_1 \cdot (\overrightarrow{O_1B} \times \vec{F}_2) \neq 0. \end{cases} \qquad (1.98)$$

Vectorul rezultant $\vec{\mathcal{R}}$ nu poate fi nul deoarece aceasta ar însemna ca cei doi vectori să fie egali şi se sens opus cu acelaşi suport sau cu suporturile

paralele ceea ce ar contrazice ipoteza.

Vectorul moment rezultant în polul O_1 nu poate fi nul pentru că ar însemna ca $\overrightarrow{O_1B}$ să fie coliniar cu $\vec{F}_2$, adică suportul lui $\vec{F}_2$ să se intersecteze cu al lui $\vec{F}_1$ ceea ce iarăşi contrazice ipoteza. Să arătăm că momentul rezultant este nenul în orice alt pol O. Presupunem că există un pol O în care $\vec{\mathcal{M}}_O = 0$. Aplicând relaţia (1.48), se obţine:

$$\vec{\mathcal{M}}_{O_1} = \vec{\mathcal{M}}_O + \overrightarrow{O_1O} \times \vec{\mathcal{R}} = \overrightarrow{O_1O} \times \vec{\mathcal{R}}, \qquad (1.99)$$

care arată că $\vec{\mathcal{M}}_{O_1}$ trebuie să fie perpendicular pe $\vec{\mathcal{R}}$, fapt contrazis de (1.98) care arată că $\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_{O_1} \neq 0$.

Produsul scalar $\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_{O_1}$ nu poate fi nul în polul O_1 deoarece aceasta ar însemna ca vectorii $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ şi $\overrightarrow{O_1B}$ să fie coplanari, ceea ce contrazice ipoteza. Pe de altă parte, acest produs este invariant la schimbarea polului, deci va fi nenul în orice pol.

Putem acum afirma că, în orice pol O, caracteristicile acestui sistem sunt:

$$\boxed{\vec{\mathcal{R}} \neq 0, \ \vec{\mathcal{M}}_O \neq 0, \ \vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O \neq 0} \qquad (1.100)$$

Deoarece $\vec{\mathcal{R}} \neq 0$ şi $\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O \neq 0$ se poate pune problema axei centrale în punctele căreia, atunci când sunt luate drept poli, torsorul este minimal iar vectorul moment rezultant este coliniar cu vectorul rezultant. Într-un punct oarecare O al axei centrale, avem:

$$\vec{\mathcal{R}} \neq 0, \ \vec{\mathcal{M}}_P = \vec{\mathcal{M}}_{min} = \vec{\mathcal{M}}_R = \frac{\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O}{\mathcal{R}^2} \vec{\mathcal{R}} \text{ şi } \vec{\mathcal{R}} \times \vec{\mathcal{M}}_{min} = 0. \qquad (1.101)$$

Momentul minim $\vec{\mathcal{M}}_{min} = \vec{\mathcal{M}}_R$ este invariant la schimbarea polului şi se comportă ca momentul unui cuplu.

În concluzie, acest sistem simplu este echivalent cu vectorul $\vec{\mathcal{R}}$ apli cat pe axa centrală şi cu un cuplu de moment ega cu momentul minim, $\vec{\mathcal{M}}_{min}$, situat pe axa centra lă (fig. 1.21.), adică planul acestui cuplu este nor mal la axa centrală, iar vectorii $\vec{v}$ şi $-\vec{v}$ ai cu plului satisfac relaţia

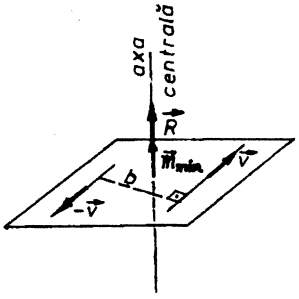


fig. 1.21.

$$|\vec{v}| \cdot b = \left|\vec{\mathcal{M}}_{min}\right|. \qquad (1.102)$$

Oricare alt sistem simplu format din doi vectori alunecători se poate transforma, prin operaţii elementare de echivalenţă, în unul dintre cele patru sisteme simple prezentate mai sus. De exemplu, sistemul din fig. 1.22. forma din doi vectori $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ paraleli, de acelaş sens şi de moduli diferiţi, prin aplicarea ope raţiei de echivalenţă numărul doi, se transfor mă într-un sistem echivalent de vectori con curenţi $(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$.

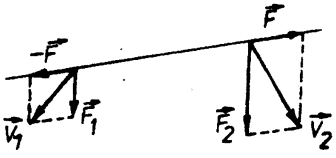


fig. 1.22.

1.5.7. Reducerea sistemelor de vectori alunecători

Prin reducerea unui sistem de vectori alunecători $(S) = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\}$ se înţelege înlocuirea acestuia cu unul din cele patru sisteme simple de vector cu care este echivalent.

Calculând torsorul sistemului (S) într-un pol O, $T_O(S)=\{\vec{\mathcal{R}}, \vec{\mathcal{M}}_O\}$ precum şi produsul acestuia, $\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O$, pot fi întâlnite următoarele cazuri de reducere, în funcţie de valorile găsite:

I. $\vec{\mathcal{R}} = 0$, $\vec{\mathcal{M}}_O = 0$, $\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O = 0$, caz în care sistemul (S) este echiva-

lent cu zero. Nu se poate pune problema axei centrale.

II. $\vec{\mathcal{R}} = 0$, $\vec{\mathcal{M}}_O \neq 0$, $\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O = 0$, caz în care sistemul (S) este echivalent cu un cuplu cu:

$$\vec{\mathcal{M}}_{cup} = \vec{\mathcal{M}}_O . \qquad (1.103)$$

III. $\vec{\mathcal{R}} \neq 0$, $\vec{\mathcal{M}}_O = 0$ sau $\vec{\mathcal{M}}_O \neq 0$, $\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O = 0$, caz în care sistemul (S) este echivalent cu un vector unic $\vec{V} = \vec{R}$, situat pe axa centrală care coincide cu suportul acestui vector unic şi este definită conform §1.5.4. observaţia 2.

Când $\vec{\mathcal{M}}_O = 0$, cele două drepte coliniare, axa centrală şi suportul lui $\vec{\mathcal{R}}$, trec prin polul O (fig. 1.23a.), iar când $\vec{\mathcal{M}}_O \neq 0$ ele nu trec prin polul O (fig. 1.23b.). Aşa cum rezultă din cazul trei al sistemelor simple de vectori, în care se încadrează sistemul acum, vectorul moment rezultant este momentul vectorului rezultant:

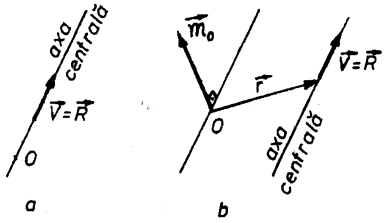


fig. 1.23.

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{r} \times \vec{\mathcal{R}} = \vec{M}_O(\vec{\mathcal{R}}), \qquad (1.104)$$

prin urmare, datorită echivalenţei, se poate extinde teorema lui Varignon la un grad mai mare de generalitate, după cum se prezintă în continuare.

Momentul rezultant în polul O al unui sistem (S) de vectori alunecători care se reduce la un vector unic, este egal cu momentul calculat în polul O al vectorului unic cu care este echivalent sistemul dat, situat pe axa centrală.

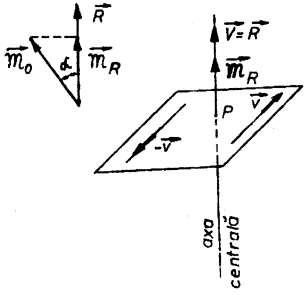


fig. 1.24.

IV. $\vec{\mathcal{R}} \neq 0$, $\vec{\mathcal{M}}_O \neq 0$, $\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O \neq 0$, caz în care sistemul (S) este echivalent cu un vector $\vec{V} = \vec{R}$ situat pe axa centrală şi cu un cuplu de moment $\vec{\mathcal{M}}_{min} = \vec{\mathcal{M}}_R = \vec{\mathcal{M}}_{cup}$ având direcţia axei

centrale (deci planul său este normal la axa centrală), iar vectorii cuplului ($\vec{v}$ şi $-\vec{v}$) cu momentul $\vec{\mathcal{M}}_{cup}$ satisfac relaţia (1.102) (fig. 1.24.).

1.5.8. Reducerea sistemelor particulare de vectori alunecători

În cele ce urmează, vor fi prezentate cazurile posibile de reducere ale unor sisteme particulare de vectori.

1.5.8.1. Reducerea sistemelor de vectori concuren ţi

Fie un sistem de n vectori concurenţi (fig. 1.12) pentru care a fost demonstrată teorema lui Varignon. Sunt posibile două cazuri de reducere:

I. $\vec{\mathcal{R}} = 0$, $\vec{\mathcal{M}}_O = 0$, $\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O = 0$, adică sistemul este echivalent cu zero.

II. $\vec{\mathcal{R}} \neq 0$, $\vec{\mathcal{M}}_O = 0$ sau $\vec{\mathcal{M}}_O \neq 0$, $\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O = 0$ adică sistemul este echivalent cu un vector unic trecând prin punctul de concurenţă. Acest rezultat se putea deduce şi prin aplicarea celei de a treia operaţii elementare de echivalenţă.

1.5.8.2. Reducerea sistemelor de vectori coplanari

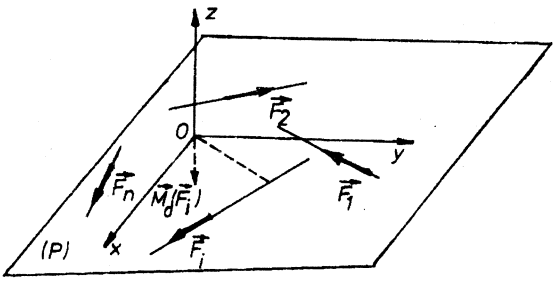


fig. 1.25.

Se consideră un sistem de vectori alunecători $(S) = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\}$ situaţi toţi într-un plan (P). Fără a restrânge generalitatea, se alege ca plan (P) planul xOy al unui

reper $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (fig. 1.25). Vectorii fiind coplanari, toate momentele sunt orientate perpendicular pe planul xOy deci au direcția axei Oz. Rezultă că și vectorul moment rezultant va avea aceeași orientare. Vectorii nu pot avea componentă după axa Oz. Un vector $\vec{F}_i$ (i = 1,2,...,n) are expresia analitică și momentul în polul O de forma:

$$\vec{F}_i = F_{ix}\vec{i} + F_{iy}\vec{j},$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}_i) = M_{iz}\vec{k} = \pm|b_i||\vec{F}_i|\cdot\vec{k},\ i = 1,2,...,n. \tag{1.105}$$

Torsorul sistemului este:

$$\vec{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^{i=n}\vec{F}_i = \left(\sum_{i=1}^{i=n}F_{ix}\right)\vec{i} + \left(\sum_{i=1}^{i=n}F_{iy}\right)\vec{j} = \mathcal{R}_x\,\vec{i} + \mathcal{R}_y\,\vec{j},$$

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \sum_{i=1}^{i=n}\vec{M}_O(\vec{F}_i) = \left(\sum_{i=1}^{i=n}M_{iz}\right)\vec{k} = \mathcal{M}_z\,\vec{k}. \tag{1.106}$$

Deoarece $\vec{\mathcal{R}}\cdot\vec{\mathcal{M}}_O = 0$, sunt posibile doar primele trei cazuri de reducere:

I. $\vec{\mathcal{R}} = 0$, $\vec{\mathcal{M}}_O = 0$, $\vec{\mathcal{R}}\cdot\vec{\mathcal{M}}_O = 0$, sistemul fiind echivalent cu zero.

II. $\vec{\mathcal{R}} = 0$, $\vec{\mathcal{M}}_O \neq 0$, $\vec{\mathcal{R}}\cdot\vec{\mathcal{M}}_O = 0$, sistemul fiind echivalent cu un cuplu, cu $\vec{M}_{cup} = \vec{\mathcal{M}}_O$.

III. $\vec{\mathcal{R}} \neq 0$, $\vec{\mathcal{M}}_O = 0$ sau $\vec{\mathcal{M}}_O \neq 0$, $\vec{\mathcal{R}}\cdot\vec{\mathcal{M}}_O = 0$, sistemul fiind echivalent cu un vector unic cu suportul situat pe axa centrală. Are loc teorema lui Varignon iar $\vec{\mathcal{M}}_{min} = 0$. Ecuația axei centrale este identică cu ecuația suportului vectorului $\vec{\mathcal{R}}$ situat în planul xOy și având momentul $\vec{M}_O(\vec{\mathcal{R}}) = \vec{\mathcal{M}}_O = \mathcal{M}_z\,\vec{k}$:

$$x\mathcal{R}_y - y\mathcal{R}_x = \mathcal{M}_z. \tag{1.107}$$

Dacă vectorul moment rezultant este nul, atunci axa centrală trece prin polul O.

1.5.8.3. Reducerea sistemelor de vectori paraleli

Se consideră o direcţie de versor $\vec{u}$ şi un sistem $(S)=\{\vec{F}_1,\vec{F}_2,...,\vec{F}_n\}$ de vectori paraleli cu versorul $\vec{u}$ şi fie O un pol (fig. 1.26.). Vectorii fiind paraleli cu versorul $\vec{u}$, au loc relaţiile:

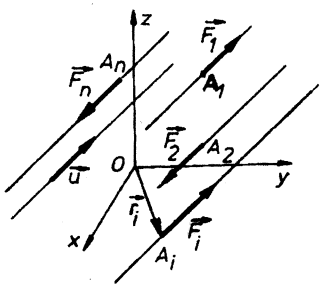


fig. 1.26.

$$\vec{F}_i=\pm|\vec{F}_i|\vec{u}=\tilde{F}_i\vec{u}\,, \qquad (1.108)$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}_i)=\vec{r}_i\times\vec{F}_i=\vec{r}_i\times\tilde{F}_i\vec{u}=\vec{r}_i\tilde{F}_i\times\vec{u}\,,\ i=1,2,...,n,$$

în care mărimea algebrică a vectorului $\vec{F}_i$ a fost notată cu $\tilde{F}_i$. Ea are semnul plus când $\vec{F}_i$ şi $\vec{u}$ au acelaşi sens şi semnul minus în caz contrar.

Torsorul sistemului este:

$$\vec{\mathcal{R}}=\sum_{i=1}^{i=n}\vec{F}_i=\left(\sum_{i=1}^{i=n}\tilde{F}_i\vec{u}\right)=\left(\sum_{i=1}^{i=n}\tilde{F}_i\right)\vec{u}\,,$$

$$\vec{\mathcal{M}}_O=\sum_{i=1}^{i=n}\vec{M}_O(\vec{F}_i)=\sum_{i=1}^{i=n}(\vec{r}_i\tilde{F}_i\times\vec{u})=\left(\sum_{i=1}^{i=n}\vec{r}_i\tilde{F}_i\right)\times\vec{u}\,. \qquad (1.109)$$

Din expresiile de mai sus se observă că vectorul rezultant este paralel cu vectorii sistemului iar vectorul moment rezultant este perpendicular pe aceştia, ceea ce implică anularea scalarului torsorului:

$$\vec{\mathcal{R}}\cdot\vec{\mathcal{M}}_O=\left(\sum_{i=1}^{i=n}\tilde{F}_i\right)\vec{u}\cdot\left[\left(\sum_{i=1}^{i=n}\vec{r}_i\tilde{F}_i\right)\times\vec{u}\right]. \qquad (1.110)$$

Datorită faptului că produsul scalar $\vec{\mathcal{R}}\cdot\vec{\mathcal{M}}_O=0$, cazurile de reducere ale sistemelor de vectori paraleli sunt aceleaşi cu cazurile de reducere ale sistemelor de vectori coplanari, adică primele trei cazuri:

I. $\vec{\mathcal{R}}=0$, $\vec{\mathcal{M}}_O=0$, $\vec{\mathcal{R}}\cdot\vec{\mathcal{M}}_O=0$, sistem echivalent cu zero.

II. $\vec{\mathcal{R}} = 0$, $\vec{\mathcal{M}}_O \neq 0$, $\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O = 0$, sistem echivalent cu un cuplu.

III. $\vec{\mathcal{R}} \neq 0$, $\vec{\mathcal{M}}_O = 0$ sau $\vec{\mathcal{M}}_O \neq 0$, $\vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O = 0$, sistem echivalent cu un vector unic cu suportul trecând prim polul O dacă $\vec{\mathcal{M}}_O = 0$ şi netrecând prin polul O dacă $\vec{\mathcal{M}}_O \neq 0$.

Problema axei centrale se va rezolva în cazul sistemului de vectori paraleli folosind faptul că vectorul moment rezultant este momentul vectorului rezultant în cadrul cazului trei de reducere când se aplică teorema lui Varignon:

$$\vec{r} \times \vec{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{M}}_O, \tag{1.111}$$

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziţie al unui punct de pe axa centrală. Înlocuind (1.109) în (1.111) se obţine:

$$\vec{r} \times \left(\sum_{i=1}^{i=n} \tilde{F}_i \right) \vec{u} = \left(\sum_{i=1}^{i=n} \vec{r}_i \tilde{F}_i \right) \times \vec{u}, \tag{1.112}$$

de unde:

$$\vec{r} \left(\sum_{i=1}^{i=n} \tilde{F}_i \right) \times \vec{u} - \left(\sum_{i=1}^{i=n} \vec{r}_i \tilde{F}_i \right) \times \vec{u} = 0 \tag{1.113}$$

şi încă:

$$\left[\vec{r} \left(\sum_{i=1}^{i=n} \tilde{F}_i \right) - \sum_{i=1}^{i=n} \vec{r}_i \tilde{F}_i \right] \times \vec{u} = 0. \tag{1.114}$$

Ultima relaţie arată că vectorul din paranteza pătrată şi versorul $\vec{u}$ sunt coliniari, ceea ce se scrie:

$$\vec{r} \left(\sum_{i=1}^{i=n} \tilde{F}_i \right) - \sum_{i=1}^{i=n} \vec{r}_i \tilde{F}_i = \mu \vec{u}, \tag{1.115}$$

în care μ este un parametru scalar.

Din (1.115) se obţine vectorul necunoscut $\vec{r}$:

$$\vec{r} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \vec{r}_i \tilde{F}_i}{\sum_{i=1}^{i=n} \tilde{F}_i} + \lambda \vec{u}\,, \qquad (1.116)$$

în care s-a notat $\lambda = \frac{\mu}{\sum_{i=1}^{i=n} \tilde{F}_i}$ un alt scalar.

Ecuația (1.116) este tocmai ecuația axei centrale. Ea trece printr-un punct notat cu C având vectorul de poziție:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \vec{r}_i \tilde{F}_i}{\sum_{i=1}^{i=n} \tilde{F}_i} \qquad (1.117)$$

și are direcția comună a vectorilor paraleli.

Punctul C, definit de (1.117), se numește **centrul sistemului de vectori paraleli**. Ecuația vectorială a axei centrale devine:

$$\vec{r} = \vec{r}_C + \lambda \vec{u}\,. \qquad (1.118)$$

Observație:

Ecuația axei centrale scrisă sub forma (1.75) conține vectorul de poziție $\vec{r}_{P_0}$ al punctului P_0 al axei care este piciorul perpendicularei coborâtă din polul O pe axa centrală. În ecuația axei centrale scrisă sub forma (1.118) apare vectorul de poziție al unui punct C aparținând axei, numit centrul sistemului de vectori paraleli. Se va vedea în continuare că acest punct are o serie de proprietăți utile și va juca un rol important în studierea sistemelor de vectori paraleli. Pentru determinarea lui trebuie utilizate coordonatele punctelor de aplicație ale vectorilor sistemului, poziția punctului C pe axa centrală depinzând de alegerea acestor puncte.

În continuare se prezintă unele proprietăți ale centrului unui sistem de

vectori paraleli.

1. Dacă într-un sistem de vectori paraleli vectorii îşi menţin punctele de aplicaţie şi scalarii dar îşi schimbă orientarea rămânând paraleli între ei printr-o rotaţie în acelaşi sens cu acelaşi unghi, atunci axa centrală trece tot timpul prin centrul sistemului de vectori paraleli.

Pentru a demonstra această proprietate, se consideră o nouă direcţie a vectorilor dată de un versor $\vec{u}^*$. Noua axă centrală are ecuaţia:

$$\vec{r} = \vec{r}_C + \lambda \vec{u}^*, \tag{1.119}$$

care arată că punctul C rămâne neschimbat.

Coordonatele punctului C faţă de un reper $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sunt:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i \tilde{F}_i}{\sum_{i=1}^{i=n} \tilde{F}_i}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} y_i \tilde{F}_i}{\sum_{i=1}^{i=n} \tilde{F}_i}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} z_i \tilde{F}_i}{\sum_{i=1}^{i=n} \tilde{F}_i}, \tag{1.120}$$

în care (x_i, y_i, z_i) sunt coordonatele punctului A_i de pe suportul lui $\vec{F}_i$ $(i=1,2,...,n)$.

2. Centrul sistemului de vectori paraleli nu se schimbă dacă toţi vectorii sistemului se amplifică în acelaşi raport k.

Presupunând că în urma amplificării cu acelaşi raport k a vectorilor sistemului, centrul acestuia se schimbă din C în C^*, se poate scrie:

$$\vec{r}_C^* = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \vec{r}_i (k\tilde{F}_i)}{\sum_{i=1}^{i=n} (k\tilde{F}_i)} = \frac{k\left(\sum_{i=1}^{i=n} \vec{r}_i \tilde{F}_i\right)}{k\left(\sum_{i=1}^{i=n} \tilde{F}_i\right)} = \vec{r}_C, \tag{1.121}$$

ceea ce arată că C^* coincide cu C.

3. Centrul sistemului de vectori paraleli nu depinde de sistemul de referinţă, el fiind un element intrinsec al sistemului de vectori.

Pentru a demonstra acest lucru, se presupune că, față de un nou reper $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$, centrul sistemului de vectori paraleli se află într-un alt punct C^* având vectorul de poziție:

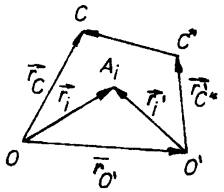


fig. 1.27.

$$\vec{r}_C'^* = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \vec{r}_i' \tilde{F}_i}{\sum_{i=1}^{i=n} \tilde{F}_i}, \qquad (1.122)$$

unde $\vec{r}_C'^* = \overrightarrow{O'C^*}$ şi $\vec{r}_i' = \overrightarrow{O'A_i}$ (fig. 1.27.). Deoarece:

$$\vec{r}_i = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}_i' \qquad (1.123)$$

vectorul de poziție al punctului C capătă forma:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \vec{r}_i \tilde{F}_i}{\sum_{i=1}^{i=n} \tilde{F}_i} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (\overrightarrow{OO'} + \vec{r}_i') \tilde{F}_i}{\sum_{i=1}^{i=n} \tilde{F}_i} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \overrightarrow{OO'} \tilde{F}_i + \sum_{i=1}^{i=n} \vec{r}_i' \tilde{F}_i}{\sum_{i=1}^{i=n} \tilde{F}_i} = \overrightarrow{OO'} + \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \vec{r}_i' \tilde{F}_i}{\sum_{i=1}^{i=n} \tilde{F}_i}, \qquad (1.124)$$

adică:

$$\vec{r}_C = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}_C'^* . \qquad (1.125)$$

Din fig. 1.27. rezultă relația:

$$\vec{r}_C = \vec{r}_{O'} + \overrightarrow{OO'} + \vec{r}_C'^* + \overrightarrow{C^*C} . \qquad (1.126)$$

Comparând (1.125) cu (1.126), se deduce că singura posibilitate ca cele două relații să exprime acelaşi vector este ca $\overrightarrow{C^*C} = 0$, acidă C şi C^* să coincidă.

1.6. Aplicații

1. Centrul unui sistem de doi vectori paraleli

Fie doi vectori paraleli $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ aplicați în punctele $A_1(x_1, y_1, z_1)$ şi

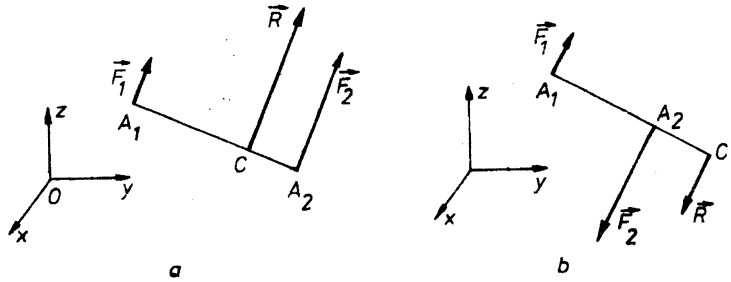


fig. 1.28.

respectiv $A_2(x_2, y_2, z_2)$. Vectorii pot avea acelaşi sens (fig. 1.28a.) sau sensuri opuse (fig. 1.28b.). Centrul acestui sistem de vectori paraleli are coordonatele:

$$x_C = \frac{x_1\tilde{F}_1 + x_2\tilde{F}_2}{\tilde{F}_1 + \tilde{F}_2}, \quad y_C = \frac{y_1\tilde{F}_1 + y_2\tilde{F}_2}{\tilde{F}_1 + \tilde{F}_2}, \quad z_C = \frac{z_1\tilde{F}_1 + z_2\tilde{F}_2}{\tilde{F}_1 + \tilde{F}_2}. \tag{1.127}$$

Dacă se notează $\frac{\tilde{F}_1}{\tilde{F}_2} = k$, unde $k > 0$ dacă $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ au acelaşi sens şi $k < 0$ dacă aceşti vectori au sensuri opuse, expresiile coordonatelor centrului C al sistemului devin:

$$x_C = \frac{x_1 + kx_2}{1+k}, \quad y_C = \frac{y_1 + ky_2}{1+k}, \quad z_C = \frac{z_1 + kz_2}{1+k}. \tag{1.128}$$

Sub această formă se recunosc coordonatele unui punct care împarte segmentul A_1A_2 în raportul k, adică în raport invers proporţional cu scalarii vectorilor. În cazul în care $k > 0$ punctul C se găseşte între punctele A_1 şi A_2 (fig. 1.28a.) iar în cazul în care $k < 0$, punctul C se află în exteriorul segmentului A_1A_2 de partea vectorului mai mare (fig. 1.28b.).

Acest rezultat se poate obţine folosind definiţia vectorială a centrului dată de relaţia (1.117) pe care o scriem în raport cu un pol O_1 ce coincide cu centrul C al sistemului:

$$\overrightarrow{O_1C} = O = \frac{\overrightarrow{CA_1}\tilde{F}_1 + \overrightarrow{CA_2}\tilde{F}_2}{\tilde{F}_1 + \tilde{F}_2}. \tag{1.129}$$

Rezultă că:

$$\overrightarrow{CA_1} = -\frac{\tilde{F}_2}{\tilde{F}_1}\overrightarrow{CA_2}, \tag{1.130}$$

de unde:

$$\overrightarrow{CA_1} = -k\overrightarrow{CA_2} \tag{1.131}$$

şi

$$\frac{\left|\overrightarrow{CA_1}\right|}{\left|\overrightarrow{CA_2}\right|} = \frac{\left|\tilde{F}_2\right|}{\left|\tilde{F}_1\right|}. \tag{1.132}$$

Relaţia (1.131) arată că vectorii $\overrightarrow{CA_1}$ şi $\overrightarrow{CA_2}$ sunt coliniari, deci C se află pe dreapta determinată de punctele A_1 şi A_2, au sensuri contrare dacă $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ au acelaşi sens adică C se află în interiorul segmentului A_1A_2 şi au acelaşi sens dacă $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ au sensuri opuse adică C se află în exteriorul segmentului A_1A_2. Relaţia (1.132) arată că punctul C împarte segmentul A_1A_2 în raportul invers proporţional cu modulii vectorilor.

2. Centrul de greutate (centrul de masă) al unui sistem de puncte materiale

Se consideră un sistem (S) de puncte materiale A_i (i = 1,2...,n), având masele m_i (i = 1,2,...,n) şi vectorii de poziţie $\vec{r}_i$ (i = 1,2,...,n) faţă de un reper $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Asupra punctelor sistemului (S) acţionează numai forţele de greutate $\vec{G}_i = m_i\vec{g}_i$ (i = 1,2,...,n) care formează un sistem de forţe paralele orientate în acelaşi sens şi fie $\vec{u}$ versorul direcţiei comune a acestor forţe având sensul acestora. Cu $\vec{g}$ se notează accelerаţia gravitaţională considerată constantă. Mărimea algebrică a greutăţii $\vec{G}_i$ este, în aceste condiţii:

$$\tilde{G}_i = \left|\vec{G}_i\right| = m_i g. \tag{1.133}$$

Centrul acestui sistem de vectori paraleli este:

$$\vec{r}_C = \overrightarrow{OC} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \vec{r}_i \tilde{G}_i}{\sum_{i=1}^{i=n} \tilde{G}_i} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \vec{r}_i \left|\vec{G}_i\right|}{\sum_{i=1}^{i=n} \left|\vec{G}_i\right|}. \tag{1.134}$$

Punctul C astfel determinat se numeşte **centrul de greutate al sistemului** de forţe paralele $\{\vec{G}_1, \vec{G}_2, ..., \vec{G}_n\}$. Acest sistem este echivalent cu o forţă unică:

$$\vec{G} = \left(\sum_{i=1}^{i=n} \left|\vec{G}_i\right|\right)\vec{u} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \vec{g}, \tag{1.135}$$

numită greutate totală a sistemului aplicată în centrul de greutate al acestuia care este notat uneori cu G. Greutatea totală a sistemului trebuie aplicată în G şi nu într-un punct oarecare al axei centrale pentru a modela corect realitatea fizică şi anume faptul că centrul de greutate este un punct a cărui poziţie trebuie să rămână nemodificată faţă de punctele sistemului atunci când acesta, păstrându-şi configuraţia, îşi modifică poziţia faţă de reperul ales.

Definind masa sistemului ca fiind suma maselor punctului:

$$M = \sum_{i=1}^{i=n} m_i, \; i = 1,2,...,n, \tag{1.136}$$

relaţia (1.134) se mai scrie:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \vec{r}_i (m_i g)}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i g} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i \vec{r}_i}{M}. \tag{1.137}$$

Punctul C, definit de (1.137) se numeşte centrul de masă al sistemului de puncte materiale A_i de mase m_i ($i = 1,2,...,n$).

Noţiunea de centru de masă este mult mai generală. Poziţia centrului de masă nu depinde de intensitatea acceleraţiei gravitaţionale $\vec{g}$ a globului te-

restru, acest punct existând şi în lipsa vreunui câmp gravitaţional.

3. Reducerea unui sistem de forţe coplanare distribuire continuu şi perpendicular pe un segment de dreaptă AB

Fie un sistem de forţe distribuite continuu şi perpendicular de un segment de dreaptă AB = b – a considerat a face parte din axa Ox a unui reper (fig. 1.29.). Se notează cu q(x) forţa pe unitatea de lungime care acţionează în punctul de abscisă x.

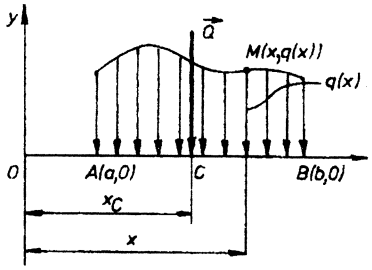


fig. 1.29.

Acest tip de sisteme de forţe se utilizează pentru modelarea acţiunii unor forţe cu distribuţie continuă cum ar fi cele datorate acţiunii apei, zăpezii, vântului sau chiar interacţiunii între două suprafeţe ale unor rigide.

Sistemul de vectori paraleli este echivalent cu un vector unic $\vec{R} = \vec{Q}$ trecând prin centrul sistemului de vectori paraleli. Vectorul unic se calculează folosind operaţia de integrare:

$$\vec{Q} = -\vec{j}\int_a^b q(x)dx. \qquad (1.138)$$

Se observă că punctul $M(x, y = q(x))$ se află pe o curbă de ecuaţie $y = q(x)$. Pe baza semnificaţiei geometrice a integralei definite, se poate concluziona că mărimea vectorului $\vec{Q}$ este tocmai mărimea ariei mărginită de $x = a$, $x = b$, $y = 0$ şi $y = q(x)$:

$$|\vec{Q}| = \int_a^b q(x)dx = A, \ \vec{Q} = -|Q|\vec{j}. \qquad (1.139)$$

Centrul sistemului de forţe paralele are ordonata nulă deoarece toate punctele de aplicaţie ale vectorilor sistemului se află pe axa Ox iar

$$x_C = \frac{\int_a^b xq(x)dx}{\int_a^b q(x)dx} = \frac{\int_a^b xq(x)dx}{|Q|}, \qquad (1.140)$$

deci momentul rezultant în polul O este (pentru cazul din fig. 1.29.):

$$\vec{M}_O = -x_C|Q|\cdot\vec{k} = -\vec{k}\int_a^b xq(x)dx. \qquad (1.141)$$

În cazul particular al sarcinii uniform distribuite de intensitate constantă (fig. 1.30a.) q_0 = constant pe o distanță l, modulul vectorului rezultant este: $|\vec{Q}| = q_0 l$, iar centrul sistemului se află la jumătatea distanței l. Dacă sarcina este distribuită sub formă triunghiulară având intensitatea maximă q_0 (fig. 1.30b.) pe o lungime l, atunci modulul vectorului rezultant este $|\vec{Q}| = \frac{q_0 l}{2}$, iar centrul sistemului este situat la $\frac{2l}{3}$ de vârful triunghiului și la $\frac{l}{3}$ de baza lui.

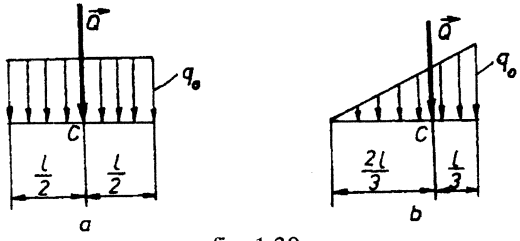


fig. 1.30

Se poate arăta că vectorul rezultant trece întotdeauna prin centrul de masă al suprafeței a cărei arie este modulul acestui vector.

4. Determinarea expresiei analitice a unui vector alunecător atunci când se cunosc coordonatele a două puncte de pe suport și modulul vectorului

Fie $\vec{F}$ un vector alunecător având modulul $|\vec{F}|$ cunoscut. Fie un reper $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ față de care sunt cunoscute coordonatele (x_A, y_A, z_A) și

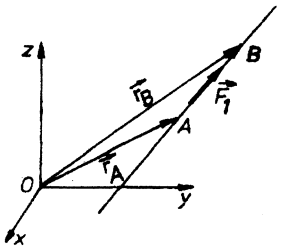


fig. 1.31.

(x_B, y_B, z_B) a două puncte A şi B situate pe suportul vectorului F (fig. 1.31.). Se notează cu $\vec{u}$ versorul vectorului $\vec{F}$, adică:

$$\vec{u} = \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|}. \qquad (1.142)$$

Se consideră vectorul $\overrightarrow{AB}$ coliniar şi de acelaşi sens cu $\vec{F}$, prin urmare $\overrightarrow{AB}$ are tot versorul $\vec{u}$:

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}. \qquad (1.143)$$

Dacă exprimăm $\vec{F}$ din relaţia (1.142) în funcţie de $\vec{u}$ şi pe $\vec{u}$ îl înlocuim cu expresia (1.143), se obţine:

$$\vec{F} = |\vec{F}| \cdot \vec{u} = |\vec{F}| \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}. \qquad (1.144)$$

Pe de altă parte avem pe baza fig. 1.31:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - x_A)\vec{k}, \qquad (1.145)$$

expresie care, utilizată în (1.144), ne furnizează formula cu care se determină expresia analitică a vectorului $\vec{F}$:

$$\vec{F} = |\vec{F}| \cdot \frac{(x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - x_A)\vec{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - x_A)^2}}. \qquad (1.146)$$

5. Se consideră sistemul de vectori coplanari din fig. 1.32., la care se cunosc $|\vec{F}_1| = 2$, $|\vec{F}_2| = 4$, $|\vec{F}_3| = 4$, $|\vec{M}| = \sqrt{3}$, OA = 1, OB = 2, OC = 1, $CD = \frac{\sqrt{3}}{2}$ în care $\vec{M}$ este momentul unui cuplu. Se cere:

a) să se calculeze torsorul în polul O, să se precizeze sistemul simplu

echivalent şi să se calculeze ecuaţia axei centrale dacă este cazul;

b) să se determine mărimea unui vector $\vec{F}_4$ aplicat în punctul B, paralel cu axa Ox şi la fel orientat, care, adăugat sistemului, să-l transforme într-un sistem de vectori a cărui axă centrală să treacă prin punctul E(0,1);

c) să se determine un vector alunecător $\vec{V}$ astfel încât sistemul $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{V}, \vec{M}\}$ să fie echivalent cu zero;

d) să se determine un vector alunecător $\vec{F}$ astfel încât sistemul $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}, \vec{M}\}$ să fie echivalent cu un cuplu de mărime algebrică $\tilde{M}_C = -2$.

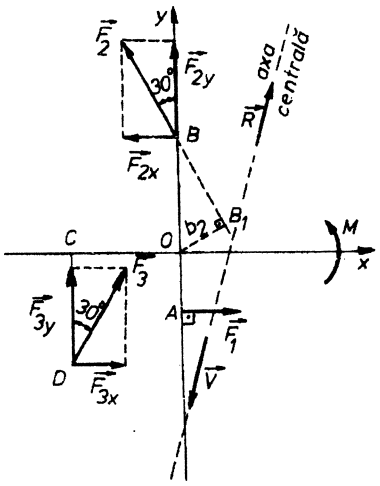


fig. 1.32.

a) Pentru a calcula torsorul sistemului $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{M}\}$ trebuie mai întâi calculate expresiile analitice ale vectorilor şi ale momentelor lor. Vectorul $\vec{F}_1$ este paralel cu axa Ox deci nu are componentă după axa Ox:

$$\vec{F}_1 = +|F_1|\vec{i} = 2\vec{i}.$$

Vectorul $\vec{F}_2$ se descompune după regula paralelogramului:

$$\vec{F}_2 = F_{2x}\vec{i} + F_{2y}\vec{j} = -|\vec{F}_2|\sin 30^0\vec{i} +$$

$$+|\vec{F}_2|\cos 30^0\vec{j} = -4\frac{1}{2}\vec{i} + 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} = -2\vec{i} + 2\sqrt{3}\vec{j}.$$

Analog se procedează cu vectorul $\vec{F}_3$:

$$\vec{F}_3 = |\vec{F}_3|\sin 30^0\vec{i} + |\vec{F}_3|\cos 30^0\vec{j} = 4\frac{1}{2}\vec{i} + 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} = 2\vec{i} + 2\sqrt{3}\vec{j}.$$

Momentul vectorului $\vec{F}_1$ se calculează folosind braţul OA al acestuia şi regula burghiului drept:

$$\vec{M}_O(\vec{F}_1) = +|OA| \cdot |\vec{F}_1| \vec{k} = 1 \cdot 2\vec{k} = 2\vec{k}.$$

Se desenează braţul vectorului $\vec{F}_2$ care este lungimea perpendicularei OB_1 coborâtă din O pe suportul lui $\vec{F}_2$. Din triunghiul dreptunghic OB_1B care are unghiul din B de 30^0, rezultă:

$$b_2 = |OB_1| = |OB| \sin 30^0 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Momentul vectorului $\vec{F}_2$ este:

$$\vec{M}_O(\vec{F}_2) = +b_2 \cdot |\vec{F}_2| \vec{k} = 1 \cdot 4\vec{k} = 4\vec{k}.$$

Pentru a calcula mai simplu momentul vectorului $\vec{F}_3$, se recurge la teorema lui Varignon, pe baza căreia rezultă că momentul vectorului $\vec{F}_3$ este egal cu suma momentelor componentelor sale. Braţul fiecărei componente este foarte uşor de determinat, lungimea fiecăruia fiind egală cu modulul câte unei coordonate a punctului D:

$$\vec{M}_O(\vec{F}_3) = \vec{M}_O(\vec{F}_{3x}) + \vec{M}_O(\vec{F}_{3y}) = +|y_D| \cdot |\vec{F}_{3x}| \vec{k} - |x_D| \cdot |\vec{F}_{3y}| \vec{k} =$$

$$= |CD| \cdot |\vec{F}_{3x}| \vec{k} - |OC| \cdot |\vec{F}_{3y}| \vec{k} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\vec{k} = 1 \cdot 2\sqrt{3}\,\vec{k} = -\sqrt{3}\,\vec{k}.$$

Observaţii:

1. Modulii componentelor vectorilor se preiau din expresia analitică a acestora. Nu trebuie să se confunde mărimea algebrică a componentelor cu modulul lor. Nu există nici o legătură între semnul componentelor, care, de fapt, nu intervine în calculul momentului, şi semnul momentului acestora.

2. Momentul se poate calcula şi cu ajutorul determinantului, de exemplu, pentru vectorul $\vec{F}_3$ aplicat în punctul $D\left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, avem:

$$\vec{M}_O(\vec{F}_3)=\vec{r}_D\times\vec{F}_3=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ 2 & 2\sqrt{3} & 0\end{vmatrix}=-\sqrt{3}\,\vec{k}\,.$$

Din sistem mai face parte şi un cuplu $\vec{M}$ situat în planul xOy şi având sens pozitiv:

$$\vec{M}=\sqrt{3}\,\vec{k}\,.$$

Acum se poate calcula torsorul sistemului în polul O:

$$T_O(S)=\begin{cases}\vec{\mathcal{R}}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=2\vec{i}+4\sqrt{3}\vec{j},\\ \vec{\mathcal{M}}_O=\vec{M}_O(\vec{F}_1)+\vec{M}_O(\vec{F}_2)+\vec{M}_O(\vec{F}_3)+\vec{M}=6\vec{k}.\end{cases}$$

Deoarece $\vec{\mathcal{R}}\neq 0$, $\vec{\mathcal{M}}_O\neq 0$ şi $\vec{\mathcal{R}}\cdot\vec{\mathcal{M}}_O=0$, rezultă că sistemul este echivalent cu un vector unic situat pe axa centrală şi netrecând prin pol. Ecuaţia axei centrale este:

$$x\cdot(4\sqrt{3})-y\cdot 2=6\,,$$

sau încă:

$$2\sqrt{3}x-y=3\,.$$

şi este reprezentată în fig. 1.32.

b. Vectorul $\vec{F}_4$, fiind paralel cu axa Ox şi orientat spre sensul pozitiv al ei, este de forma $\vec{F}_4=F_4\vec{i}$. De asemenea, punctul de aplicaţie fiind B, momentul lui $\vec{F}_4$ este $\vec{M}_O(\vec{F}_4)=-2F_4\vec{k}$. Torsorul în polul O al sistemului $\{\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3,\vec{F}_4,\vec{M}\}$, ale cărui componente le notăm cu $\vec{\mathcal{R}}'$ şi $\vec{\mathcal{M}}'_O$, este:

$$\vec{\mathcal{R}}'=\vec{\mathcal{R}}+\vec{F}_4=(2+F_4)\vec{i}+4\sqrt{3}\vec{j}\,,$$
$$\vec{\mathcal{M}}'_O=\vec{\mathcal{M}}_O+\vec{M}_O(\vec{F}_4)=(6-2F_4)\vec{k}\,.$$

Ecuaţia a axei centrale este:

$$x\cdot 4\sqrt{3}-y\cdot(2+F_4)=6-2F_4\,.$$

Deoarece se cere ca ea să treacă prin punctul E(0,1), rezultă că aceste coordonate trebuie să satisfacă ecuația axei centrale, rezultând ecuația:

$$0 \cdot 4\sqrt{3} - 1 \cdot (2 + F_4) = 6 - 2F_4 .$$

Necunoscuta F_4 are valoare 8 deci $\vec{F}_4 = 8\vec{i}$.

c. Pentru a afla vectorul $\vec{V}$ vom începe prin a nota vectorul rezultant şi vectorul moment rezultant în polul O al sistemului $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{V}, \vec{M}\}$ cu $\vec{\mathcal{R}}_1$ şi $\vec{\mathcal{M}}_O^{(1)}$. Torsorul acestui sistem trebuie să fie nul, deci avem:

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{R}}_1 = \vec{\mathcal{R}} + \vec{V} = 0 \\ \vec{\mathcal{M}}_O^{(1)} = \vec{\mathcal{M}}_O + \vec{M}_O(V) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{V} = -\vec{\mathcal{R}}, \\ \vec{M}_O(V) = -\vec{\mathcal{M}}_O . \end{cases}$$

Rezultă că vectorul $\vec{V}$ este egal şi de sens opus cu $\vec{\mathcal{R}}$ şi este situat pe axa centrală a sistemului inițial (fig. 1.32.).

d. Pentru a determina vectorul $\vec{F}$ se notează componentele torsorului sistemului $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}, \vec{M}\}$ cu $\vec{\mathcal{R}}_2$ şi $\vec{\mathcal{M}}_O^{(2)}$. Pentru ca acest sistem să fie echivalent cu un cuplu de valoare $\vec{M}_C = -2\vec{k}$ trebuie ca:

$$\vec{\mathcal{R}}_2 = \vec{\mathcal{R}} + \vec{F} = 0,$$
$$\vec{\mathcal{M}}_O^{(2)} = \vec{\mathcal{M}}_O + \vec{M}_O(F) = \vec{M}_C = -2\vec{k} .$$

De aici rezultă:

$$\vec{F} = -\vec{\mathcal{R}} = -2\vec{i} - 4\sqrt{3}\,\vec{j},$$
$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{M}_C - \vec{\mathcal{M}}_O = -2\vec{k} - 6\vec{k} = -8\vec{k} .$$

Ecuația suportului vectorului $\vec{F}$ este:

$$-4\sqrt{3}x + 2y = -8,$$

sau încă:

$$-2\sqrt{3}x + y = -4 .$$

6. Se consideră un paralelipiped de dimensiuni OA = 2, OC = 4 şi $OH = 2$ supus acţiunii unui sistem de solicitări $S\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{M}\}$ cu $|\vec{F}_1| = 2$, $|\vec{F}_2| = 2\sqrt{5}$, $|\vec{F}_3| = 6\sqrt{2}$, $|\vec{M}| = 8$, unde $\vec{M}$ este un cuplu situat în planul xOy (fig. 1.33.). Cunoscând că OP = PA şi BQ = QE, se cere:

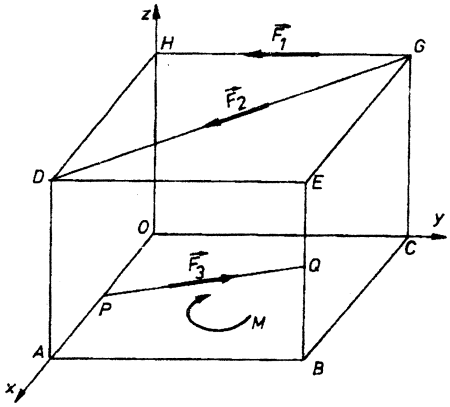


fig. 1.33.

a) Să se calculeze torsorul sistemului în polul O, torsorul minimal şi să se precizeze sistemul simplu cu care este echivalent. Dacă este cazul, să se calculeze ecuaţia axei centrale.

b) Să se determine un cuplu paralel cu axa Oy care, adăugat sistemului, să-l transforme într-un sistem echivalent cu un vector unic şi să se scrie ecuaţia axei centrale.

c) Să se determine un vector alunecător care, adăugat sistemului de la punctul a, să-l transforme într-un sistem echivalent cu zero. Aceeaşi problemă pentru sistemul rezultat la punctul b.

d) Să se determine un vector alunecător care, adăugat sistemului de la punctul a, să-l transforme într-un sistem echivalent cu un cuplu $\vec{M}_C = 18\vec{k}$ şi apoi cu un cuplu egal cu momentul minim $\vec{M}_{min}$.

a. Pentru a determina torsorul sistemului în polul O se calculează mai întâi expresiile analitice ale vectorilor şi ale momentelor lor. Vectorul $\vec{F}_1$ este paralel cu axa Oy şi se sens opus cu ea, deci este de forma:

$$\vec{F}_1 = -2\vec{j}.$$

Pentru a determina expresiile analitice ale vectorilor $\vec{F}_2$ şi $\vec{F}_3$ vom folosi rezultatele de la aplicaţia numărul patru din §1.6. Se determină coordonatele a două puncte de pe suportul fiecărui vector, rezultând: G(0,4,2), D(2,0,2), P(1,0,0), Q(2,4,1). Expresia analitică a vectorului $\vec{F}_2$ este:

$$\vec{F}_2 = \left|\vec{F}_2\right| \cdot \frac{\overrightarrow{GD}}{\left|\overrightarrow{GD}\right|} = \left|\vec{F}_2\right| \cdot \frac{(x_D - x_G)\vec{i} + (y_D - y_G)\vec{j} + (z_D - z_G)\vec{k}}{\sqrt{(x_D - x_G)^2 + (y_D - y_G)^2 + (z_D - z_G)^2}} =$$

$$= 2\sqrt{5} \cdot \frac{(2-0)\vec{i} + (0-4)\vec{j} + (2-2)\vec{k}}{\sqrt{(2-0)^2 + (0-4)^2 + (2-2)^2}} = 2\sqrt{5} \cdot \frac{2\vec{i} - 4\vec{j}}{2\sqrt{5}} = 2\vec{i} - 4\vec{j}.$$

Analog, pentru $\vec{F}_3$ se obţine:

$$\vec{F}_3 = \left|\vec{F}_3\right| \cdot \frac{\overrightarrow{PQ}}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|} = 6\sqrt{2} \cdot \frac{1\vec{i} + 4\vec{j} + 1\vec{k}}{\sqrt{1+16+1}} = 6\sqrt{2} \cdot \frac{\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}}{3\sqrt{2}} = 2\vec{i} + 8\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Momentul în polul O al vectorilor $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ şi $\vec{F}_3$ sunt:

$$\vec{M}_O(\vec{F}_1) = \vec{r}_H \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec{i},$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}_2) = \vec{r}_D \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 4\vec{j} - 8\vec{k},$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}_3) = \vec{r}_P \times \vec{F}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{j} + 8\vec{k}.$$

Cuplul $\vec{M}$ fiind situat în planul xOy, are direcţia axei Oz şi, folosind regula burghiului drept, atunci când se roteşte în sensul indicat de săgeata curbilinie, se obţine semnul minus, burghiul drept înaintând spre sensul negativ al axei Oz. Rezultă:

$$\vec{M} = -8\vec{k}.$$

Torsorul sistemului în polul O este:

$$T_O(S)=\begin{cases}\vec{\mathcal{R}}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=4\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k},\\ \vec{\mathcal{M}}_O=\vec{M}_O(\vec{F}_1)+\vec{M}_O(\vec{F}_2)+\vec{M}_O(\vec{F}_3)+\vec{M}=12\vec{i}+2\vec{j}-8\vec{k}.\end{cases}$$

Deoarece $\vec{\mathcal{R}}\cdot\vec{\mathcal{M}}_O=4\cdot 12+2\cdot 2+2\cdot(-8)=36\neq 0$, rezultă că avem: $\vec{\mathcal{R}}\neq 0$, $\vec{\mathcal{M}}_O\neq 0$ şi $\vec{\mathcal{R}}\cdot\vec{\mathcal{M}}_O\neq 0$, deci sistemul este echivalent cu un vector şi un cuplu (cazul patru de reducere).

Torsorul minimal este:

$$T_{min}(S)=\begin{cases}\vec{\mathcal{R}}=4\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k},\\ \vec{\mathcal{M}}_{min}=\dfrac{\vec{\mathcal{R}}\cdot\vec{\mathcal{M}}_O}{\mathcal{R}^2}\cdot\vec{\mathcal{R}}=\dfrac{36}{24}(4\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k})=6\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}.\end{cases}$$

Observaţii:

1. Pe baza cazurilor de anulare a momentului axial şi a faptului că cele trei componente ale momentului unui vector sunt tocmai momentele axiale ale vectorului în raport cu axele reperului, se poate preciza, fără calcul, dacă o coordonată a momentului unui vector este nulă. De exemplu, momentul vectorului $\vec{F}_1$ nu are componentă după axa Oy deoarece este paralel cu ea şi nu are componentă după axa Oz deoarece o intersectează. Reciproc, dacă momentul unui vector nu are componentă după o axă, înseamnă că vectorul fie intersectează axa, fie este paralel cu ea, fie este coliniar cu ea.

2. Momentul unui vector alunecător se calculează folosind vectorul de poziţie al unui punct oarecare de pe suportul său, de regulă preferându-se, pentru a simplifica calculele, un punct care are cât mai multe coordonate nule. De exemplu, momentul vectorului $\vec{F}_2$ se poate calcula folosind punctul G(0,4,2).

$$\vec{M}_O(\vec{F}_2)=\vec{r}_G\times\vec{F}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 4 & 2\\ 2 & -4 & 0\end{vmatrix}=8\vec{i}+4\vec{j}-8\vec{k}.$$

3. Un cuplu care face parte din sistem nu afectează vectorul rezultant al sistemului întrucât suma vectorilor ce-l formează este nulă. Momentul cuplului se adună însă împreună cu momentele celorlalți vectori pentru a obține vectorul moment rezultant al sistemului.

Pentru a scrie ecuația axei centrale a sistemului, se calculează mai întâi produsul:

$$\vec{\mathcal{R}} \times \vec{\mathcal{M}}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & 2 \\ 12 & 2 & -8 \end{vmatrix} = -20\vec{i} + 56\vec{j} - 16\vec{k}$$

şi modulul vectorului rezultant:

$$\left|\vec{\mathcal{R}}\right| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{24}\,.$$

Introducând datele de mai sus în ecuația vectorială a axei centrale (1.75), se obține:

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \frac{-20\vec{i} + 56\vec{j} - 16\vec{k}}{24} + \lambda(4\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}),$$

în care (x,y,z) sunt coordonatele unui punct curent al axei iar λ este un parametru scalar. Din relația anterioară rezultă ecuațiile parametrice ale axei centrale:

$$x = -\frac{20}{24} + 4\lambda,$$

$$y = \frac{56}{24} + 2\lambda,$$

$$z = -\frac{16}{24} + 2\lambda,$$

de unde, egalând valorile lui λ din fiecare ecuație, se obțin ecuațiile canonice ale axei centrale:

$$\frac{x + \frac{5}{6}}{4} = \frac{y - \frac{7}{3}}{2} = \frac{z + \frac{2}{3}}{2},$$

care reprezintă o dreaptă având direcția lui $\vec{\mathcal{R}}$ și trecând prin punctul de coordonate $\left(-\frac{5}{6},\frac{7}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

b. Pentru a răspunde la punctul b, se consideră torsorul în polul O al unui nou sistem (S_1) format din vectorii sistemului inițial la care se adaugă un cuplu $\vec{M}_1$. Componentele torsorului noului sistem sunt:

$$T_O(S_1)=\begin{cases}\vec{\mathcal{R}}_1=\vec{\mathcal{R}},\\ \vec{\mathcal{M}}_O^{(1)}=\vec{\mathcal{M}}_O+\vec{M}_1.\end{cases}$$

Cuplul $\vec{M}_1$ fiind paralel cu axa Oy, este de forma $\vec{M}_1=\pm|M_1|\cdot\vec{j}=m\vec{j}$, unde m este mărimea algebrică a cuplului. Rezultă că:

$$T_O(S_1)=\begin{cases}\vec{\mathcal{R}}_1=4\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k},\\ \vec{\mathcal{M}}_O^{(1)}=12\vec{i}+(2+m)\vec{j}-8\vec{k}.\end{cases}$$

Pentru ca sistemul (S_1) să fie echivalent cu un vector unic, trebuie ca $\vec{\mathcal{R}}_1\cdot\vec{\mathcal{M}}_O^{(1)}=0$, adică:

$$4\cdot 12+2(2+m)+2\cdot(-8)=0,$$

de unde:

$$m=-18,$$

adică:

$$\vec{M}=-18\vec{j}.$$

Torsorul sistemului (S_1) este:

$$T_O(S_1)=\begin{cases}\vec{\mathcal{R}}_1=4\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k},\\ \vec{\mathcal{M}}_O^{(1)}=12\vec{i}-16\vec{j}-8\vec{k},\end{cases}$$

iar axa centrală are ecuațiile parametrice:

$$x=\frac{16}{24}+4\lambda,$$

$$y=\frac{56}{24}+2\lambda,$$

$$z=-\frac{88}{24}+2\lambda,$$

$$\frac{x-\frac{2}{3}}{4}=\frac{y-\frac{7}{3}}{2}=\frac{z+\frac{11}{3}}{2}.$$

c. Notăm cu $\vec{\mathcal{R}}_2$ şi $\vec{\mathcal{M}}_O^{(2)}$ componentele torsorului sistemului (S_2) obţinut din (S) prin adăugarea unui vector $\vec{F}$ astfel încât sistemul (S_2) să fie echivalent cu zero. Avem:

$$T_O(S_2)=\begin{cases}\vec{\mathcal{R}}_2=\vec{\mathcal{R}}+\vec{F}=0,\\ \vec{\mathcal{M}}_O^{(2)}=\vec{\mathcal{M}}_O+\vec{M}_O(\vec{F})=0.\end{cases}$$

Din condiţiile de mai sus, rezultă:

$$\vec{F}=-\vec{\mathcal{R}}=-4\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k},$$

$$\vec{M}_O(\vec{F})=-\vec{\mathcal{M}}_O=-12\vec{i}-2\vec{j}+8\vec{k}.$$

Dar, conform proprietăţii numărul doi a momentului polar, trebuie să fie îndeplinită obligatoriu condiţia $\vec{F}\cdot\vec{M}_O(\vec{F})=0$, ori, în acest caz:

$\vec{F}\cdot\vec{M}_O(\vec{F})=36\neq 0$. Acest lucru arată că problema propusă nu are soluţie.

În cazul sistemului (S_1), prin adăugarea unui vector $\vec{V}$, se obţine un sistem (S_3) având componentele torsorului în polul O, $\vec{\mathcal{R}}_3$ şi $\vec{\mathcal{M}}_O^{(3)}$, care trebuie să îndeplinească condiţiile:

$$T_O(S_3)=\begin{cases}\vec{\mathcal{R}}_3=\vec{\mathcal{R}}_1+\vec{V}=0,\\ \vec{\mathcal{M}}_O^{(3)}=\vec{\mathcal{M}}_O^{(1)}+\vec{M}_O(\vec{V})=0.\end{cases}$$

Analog ca în situaţia anterioară, se obţine:

$$\begin{cases}\vec{V}=-\vec{\mathcal{R}}_1=-4\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k},\\ \vec{M}_O(\vec{V})=-\vec{\mathcal{M}}_O^{(1)}=-12\vec{i}+16\vec{j}+8\vec{k}.\end{cases}$$

De această dată $\vec{V}\cdot\vec{M}_O(\vec{V})=0$, deci soluția problemei este vectorul alunecător $\vec{V}$ având ca suport dreapta de ecuație:

$$\vec{r}=\frac{\vec{V}\times\vec{M}_O(\vec{V})}{V^2}+\lambda\vec{V}=\frac{(-\vec{\mathcal{R}}_1)\times(-\vec{\mathcal{M}}_O^{(1)})}{(-\vec{\mathcal{R}}_1)^2}+\lambda(-\vec{\mathcal{R}}_1)=\frac{\vec{\mathcal{R}}_1\times\vec{\mathcal{M}}_O^{(1)}}{\vec{\mathcal{R}}_1^{\,2}}-\lambda\vec{\mathcal{R}}_1,$$

care este tocmai ecuația axei centrale a sistemului (S_1). Prin urmare, vectorul $\vec{V}$ este egal cu $\vec{\mathcal{R}}_1$ şi de sens opus iar suportul său coincide cu axa centrală a sistemului.

Observație:

Atunci când se obține, ca soluție a unei probleme, expresia analitică a unui vector şi expresia analitică a momentului său, întotdeauna trebuie să se verifice dacă cei doi vectori sunt perpendiculari, adică dacă produsul lor scalar este nul. Dacă această condiție nu este îndeplinită, problema nu are soluție.

d. Punctul d al problemei se abordează la fel, adică se consideră un nou sistem, notat (S_4), format din vectorii sistemului (S) la care se adaugă un vector notat $\vec{V}_1$, operație care să conducă la situația ca (S_4) să fie echivalent cu un cuplu având expresia $\vec{M}_C=18\vec{k}$ adică să fie îndeplinite condițiile:

$$T_O(S_4)=\begin{cases}\vec{\mathcal{R}}_4=\vec{\mathcal{R}}+\vec{V}_1=0,\\ \vec{\mathcal{M}}_O^{(4)}=\vec{\mathcal{M}}_O+\vec{M}_O(\vec{V}_1)=\vec{M}_C.\end{cases}$$

Rezultă că:

$$\vec{V}_1=-\vec{\mathcal{R}}=-4\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k},$$
$$\vec{M}_O(\vec{V}_1)=\vec{M}_C-\vec{\mathcal{M}}_O=18\vec{k}-(12\vec{i}+2\vec{j}-8\vec{k})=-12\vec{i}-2\vec{j}+26\vec{k}.$$

Cum relația $\vec{V}_1\cdot\vec{M}_O(\vec{V}_1)=0$ se verifică, rezultă că la sistemul (S) se adaugă un vector $\vec{V}_1=-4\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$ având suportul dat de ecuația vectorială:

$$\vec{r}=\frac{\vec{V}_1\times\vec{M}_O(\vec{V}_1)}{\vec{V}_1^{\,2}}+\lambda\vec{V}_1.$$

Ecuațiile parametrice ale suportului se obțin din relația anterioară scrisă sub formă analitică:

$$x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=\frac{-56\vec{i}+128\vec{j}-16\vec{k}}{24}+\lambda(-4\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k})$$

și sunt:

$$x=-\frac{7}{3}-4\lambda,\ y=\frac{16}{3}-2\lambda,\ z=-\frac{2}{3}-2\lambda.$$

Ecuațiile canonice ale suportului sunt:

$$\frac{x+\frac{7}{3}}{4}=\frac{y-\frac{16}{3}}{2}=\frac{z+\frac{2}{3}}{2}.$$

Se observă că suportul vectorului $\vec{V}_1$ este paralel cu axa centrală, dar nu coincide cu aceasta.

Pentru a determina un vector $\vec{V}_2$ care adăugat sistemului inițial să-l transforme într-un sistem (S_5) care să aibă torsorul egal cu torsorul minimal al sistemului (S), se procedează ca mai înainte, numai că momentul cuplului va fi $\vec{\mathcal{M}}_{min}=6\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$. Rezultă condițiile:

$$T_O(S_5)=\begin{cases}\vec{\mathcal{R}}_5=\vec{\mathcal{R}}+\vec{V}_2=0,\\ \vec{\mathcal{M}}_O^{(5)}=\vec{\mathcal{M}}_O+\vec{M}_O(\vec{V}_2)=6\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}.\end{cases}$$

de unde:

$$\vec{V}_2=-\vec{\mathcal{R}}=-4\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k},$$

$$\vec{M}_O(\vec{V}_2)=\vec{M}_{min}-\vec{\mathcal{M}}_O=-6\vec{i}+\vec{j}+11\vec{k}.$$

Și în acest caz se verifică relația $\vec{V}_2\cdot\vec{M}_O(\vec{V}_2)=0$, deci vectorul alunecător $\vec{V}_2$ cu suportul:

$$\vec{r}=\frac{\vec{V}_2\times\vec{M}_O(\vec{V}_2)}{\vec{V}_2^{\,2}}+\lambda\vec{V}_2,$$

este soluția problemei. După efectuarea calculelor se obține exact ecuația axei centrale.

Generalizare: Pentru a obține dintr-un sistem (S) de vectori alunecători un sistem (S_1) echivalent cu un cuplu egal cu momentul minim al sistemului inițial, se adaugă sistemului (S) un vector opus cu vectorul său rezultant și având ca suport axa centrală a sistemului (S).