CAPITOLUL III

STATICA

Statica studiază echilibrul corpurilor şi echilibrul sistemelor de corpuri.

3.1. Statica punctului material

3.1.1. Statica punctului material liber

Se cunoaşte că un punct material este un punct geometric dotat cu masă. Un punct material este liber atunci când poate ocupa orice poziţie în spaţiu, iar el se găseşte numai sub acţiunea unor forţe date, poziţia lui depinzând de aceste forţe.

Un punct material liber supus acţiunii unor forţe având rezultanta $\vec{\mathcal{R}}$ este în echilibru faţă de un reper inerţial dacă viteza sa în raport cu acel reper este zero în orice moment, adică în cazul în care coordonatele sale sunt constante.

Din definiţia anterioară rezultă $\vec{v} = 0$, de unde $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$. Folosind

acest rezultat în legea a doua a lui Newton $m\vec{a} = \vec{F}$, rezultă că $\vec{F} = 0$ ceea ce reprezintă condiția necesară de echilibru.

Pe de altă parte, plecând de la condiția $\vec{F} = 0$, rezultă $\vec{a} = 0$ adică, prin integrare, $\vec{v} = \vec{v}_0$ unde $\vec{v}_0$ este o viteză constantă care, dacă este nulă, punctul este în repaus iar dacă nu, punctul este în mişcare rectilinie şi uniformă.

Condiția necesară şi suficientă ca un punct material liber **aflat inițial în repaus să rămână în repaus** sub acțiunea unui sistem de forțe date este ca rezultanta $\vec{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i$ a acestui sistem să fie nulă:

$$\vec{\mathcal{R}} = 0. \tag{3.1}$$

Prin proiectarea ecuației vectoriale (3.1) pe axele unui reper, se obțin trei ecuații scalare de echilibru:

$$\mathcal{R}_x = \sum_{i=1}^{i=n} F_{i_x} = 0,\ \mathcal{R}_y = \sum_{i=1}^{i=n} F_{i_y} = 0 \text{ şi } \mathcal{R}_z = \sum_{i=1}^{i=n} F_{i_z} = 0. \tag{3.2}$$

În cazul unui sistem de forțe coplanare situate, de exemplu, în planul xOy, se pot scrie numai două ecuații scalare de echilibru:

$$\mathcal{R}_x = \sum_{i=1}^{i=n} F_{i_x} = 0 \text{ şi } \mathcal{R}_y = \sum_{i=1}^{i=n} F_{i_y} = 0. \tag{3.3}$$

Problema se spune că este static determinată dacă numărul de ecuații coincide cu numărul de necunoscute. În cazul când numărul necunoscutelor depăşeşte numărul ecuațiilor, atunci problema se spune că este static nedeterminată, iar acest gen de probleme nu fac obiectul acestei lucrări. Dacă sistemul de ecuații scalare este nedeterminat sau imposibil, atunci punctul material poate rămâne în repaus într-o infinitate de poziții sau, respectiv, nu are o poziție de repaus.

Necunoscutele sistemului de ecuații de echilibru pot fi elemente care

determină poziția de echilibru (coordonate, distanțe, unghiuri) sau, dacă se cunoaște poziția de echilibru, forțele ce acționează asupra punctului pentru a-l menține în poziția de echilibru dată.

3.1.2. Statica punctului material supus la legături

Un punct material este supus la legături dacă poziția sa nu este determinată exclusiv de forțele date care acționează asupra sa ci și de anumite **obligații geometrice** ca, de exemplu, de a rămâne pe o curbă sau pe o suprafață indiferent de mărimea forțelor ce acționează asupra punctului.

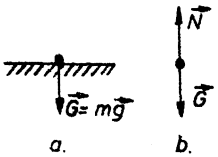


fig. 3.1.

Pentru a putea scrie ecuații de echilibru atunci când punctul este supus la legături, este necesară o nouă axiomă. Acest lucru este evidențiat de următorul exemplu simplu. Presupunem că un punct material de masă m este în repaus pe un plan orizontal (fig. 3.1.a), prin urmare asupra lui acționează o singură forță dată și anume greutatea sa, care este nenulă. Acest fapt este în contradicție cu condițiile de repaus ale unui punct material liber unde se preciza că rezultanta forțelor care acționează asupra punctului trebuie să fie egală cu zero. Prin urmare, principiile mecanicii, așa cum au fost enunțate de Newton, se aplică doar punctului material liber, ceea ce conduce la concluzia că, pentru punctul material supus la legături, este necesară o nouă axiomă care să permită reducerea problemei la o problemă echivalentă cu cea a unui punct material liber. Dacă în exemplul dat ne imaginăm că îndepărtăm planul, atunci, pentru a menține punctul în repaus, trebuie să acționăm asupra lui cu o forță notată $\vec{N}$ egală și de sens opus cu $\vec{G}$ (fig.3.1.b). Din punct de vedere mecanic cele două situații sunt echivalente, iar forța introdusă $\vec{N}$ o numim **forță de legătură** sau **reacțiune**. Presupunând că procedeul se poate generaliza pentru toate tipurile de legături la care poate

fi supus punctul material, se poate enunța axioma legăturilor: orice legătură geometrică se poate înlocui cu o forță denumită forță de legături sau reacțiune, necunoscută, notată în general cu $\vec{R}$, iar punctul material eliberat de legătură și acționat de forțele date $\vec{F}$ și de reacțiune $\vec{R}$ este echivalent din punct de vedere mecanic cu punctul material supus la legături.

Condiția necesară și suficientă pentru ca un punct material aflat inițial în repaus și acționat de o forță rezultantă $\vec{\mathcal{R}} = \vec{F} + \vec{R}$ să rămână în repaus sub acțiunea acesteia este ca rezultanta să fie nulă:

$$\vec{F} + \vec{R} = 0, \tag{3.4}$$

unde $\vec{F}$ este rezultanta forțelor date iar $\vec{R}$ este reacțiunea legăturilor.

Legăturile pot fi ideale, când se neglijează frecările și reale, când se ține cont de frecări.

Practic, un punct material poate fi supus la două tipuri de legături:

a. Legătura prin fir (fig. 3.2.a) sau tijă (fig. 3.2.b). Firul se înlocuiește cu reacțiunea $\vec{T}$ orientată în lungul firului spre punctul de ancorare și are modulul necunoscut (fig. 3.2.a). Tija se înlocuiește cu o reacțiune $\vec{S}$ numită efort sau tensiune în tijă orientată în lungul ei, având sensul arbitrar ales și modulul necunoscut (fig. 3.2.b). Sensul tensiunii în tijă nu poate fi precizat dinainte, deoarece tija, fiind rigidă, poate prelua atât forțe de întindere cât și forțe de compresiune, spre deosebire de fir care, pentru a exista legătura, poate fi numai întins. După rezolvarea sistemului de ecuații scalare de echilibru provenit din (3.4) prin proiectarea pe axele unui reper, dacă tensiunea din tijă rezultă cu semnul plus, atunci sensul presupus este corect iar, în caz contrar, sensul real este opus celui presupus inițial în mod arbitrar.

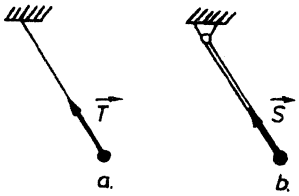


fig. 3.2.

Această legătură este considerată ideală.

b. Legătura numită reazem, care înseamnă că punctul este în echilibru sprijinindu-se pe o curbă (fig. 3.3.a) sau pe o suprafață (fig. 3.3.b). Reazemul se înlocuieşte cu o reacțiune $\vec{R}$ care se descompune în două componente. În cazul rezemării pe o curbă, reacțiunea $\vec{R}$ are o componentă $\vec{T}$ orientată după tangenta la curbă şi o componentă $\vec{N}$ numită normală situată în planul normal la curbă (fig. 3.3.a). Dacă ecuațiile curbei sunt:

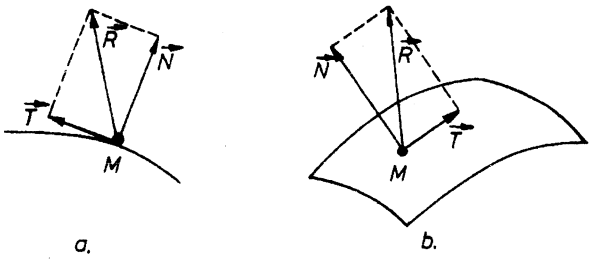


fig. 3.3.

$$f(x,y,z) = 0 \text{ şi } g(x,y,z) = 0, \tag{3.5}$$

adică curba este dată ca intersecție a două suprafețe, reacțiunea $\vec{N}$ este în planul determinat de normalele la cele două suprafețe care este şi normal la curbă şi are ecuația:

$$\vec{N} = \lambda \operatorname{grad} f + \mu \operatorname{grad} g\,. \tag{3.6}$$

Această componentă are modulul necunoscut.

Componenta tangențială $\vec{T}$ se numeşte forță de frecare, este notată adesea $\vec{F}_f$, are **sensul opus tendinței de alunecare a punctului** şi modulul:

$$\left|\vec{T}\right| = \left|\vec{F}_f\right| \le \mu\left|\vec{N}\right|, \tag{3.7}$$

relație determinată experimental în care μ se numeşte coeficient de frecare la alunecare. Dacă $\left|\vec{T}\right| = \mu\left|\vec{N}\right|$ echilibrul se numeşte la limită, caz în care $\vec{T} = \vec{F}_f$ poate fi calculată în raport cu $\vec{N}$. Dacă $\left|\vec{T}\right| < \mu\left|\vec{N}\right|$, adică echilibrul nu este la limită, forța de frecare este necunoscută.

În cazul rezemării pe o suprafață, reacțiunea $\vec{R}$ are o componentă $\vec{N}$

orientată după normala la suprafață şi de modul necunoscut şi o componentă $\vec{T}$ aflată în planul tangent la suprafață (fig. 3.3.b). Dacă suprafața are ecuația:

$$f(x,y,z) = 0, \tag{3.8}$$

atunci

$$\vec{N} = \lambda \operatorname{grad} f . \tag{3.9}$$

Ca şi în cazul rezemării pe o curbă, componenta tangențială $\vec{T}$ se numeşte forță de frecare $\vec{F}_f$, are sensul opus tendinței de alunecare şi modulul:

$$\left|\vec{T}\right| = \left|\vec{F}_f\right| \le \mu\left|\vec{N}\right| . \tag{3.10}$$

Dacă echilibrul este la limită $\left|\vec{F}_f\right| = \mu\left|\vec{N}\right|$ iar dacă $\left|\vec{F}_f\right| \le \mu\left|\vec{N}\right|$ echilibrul nu este la limită şi forța de frecare este necunoscută.

Legătura numită reazem poate fi reală (cu frecare) sau ideală (când se neglijează frecările). Reazemul ideal se înlocuieşte numai cu reacțiunea normală, forța de frecare fiind considerată nulă.

Numărul de ecuații scalare rezultate prin proiectarea pe axele de coordonate a relației vectoriale (3.4) este de două în cazul unei probleme plane şi de trei în cazul unei probleme spațiale. În cazul reazemului ideal de tip curbă plană, necunoscutele sunt modulul reacțiunii normale şi lungimea arcului de curbă $S = \overset{\frown}{M_0M}$ care determină poziția punctului. Dacă reazemul este ideal de tip curbă spațială necunoscutele sunt modulele celor două componente ale reacțiunii normale situate în planul normal la curbă şi arcul s de curbă care determină poziția punctului. Dacă reazemul este ideal de tip suprafață necunoscutele sunt modulul reacțiunii normale şi doi parametri ce determină poziția punctului pe suprafață.

În cazul legăturilor reale, dacă echilibrul este la limită, problema are aceleaşi necunoscute ca în cazul legăturilor ideale. Dacă echilibrul nu este la limită, apare o necunoscută în plus şi anume modulul forței de frecare $\left|\vec{F}_f\right|$.

Observaţii:

1. Când ecuaţia unei suprafeţe este (3.8), atunci:

$$\text{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}, \tag{3.10}$$

iar relaţia (3.4) furnizează următoarele ecuaţii scalare:

$$F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = 0,\ F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = 0,\ F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \tag{3.11}$$

necunoscutele fiind $|\vec{N}|$ şi cele trei coordonate z, y, z ale punctului, cele patru ecuaţii scalare (3.8) şi (3.11) fiind, în general, suficiente pentru a le determina.

În cazul unei curbe de ecuaţii (3.5), reacţiunea normală este dată de (3.6), care, înlocuită în (3.4), furnizează următoarele ecuaţii scalare:

$$F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} + \mu\frac{\partial g}{\partial x} = 0,\ F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} + \mu\frac{\partial g}{\partial y} = 0,\ F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} + \mu\frac{\partial g}{\partial z} = 0, \tag{3.12}$$

necunoscutele fiind mărimile scalare ale celor două componente ale reacţiunii normale şi cele trei coordonate x, y, z ale punctului. Cele cinci necunoscute se pot determina rezolvând sistemul de cinci ecuaţii scalare de (3.5) şi (3.12). În ambele situaţii sistemele de ecuaţii scalare pot fi, uneori, nedeterminate sau imposibile, ceea ce arată că punctul are o infinitate de poziţii de echilibru sau, respectiv, că nu este posibilă o asemenea poziţie.

2. Sensul reacţiunii normale $\vec{N}$ se poate determina practic, în unele situaţii, ca fiind identic cu sensul în care se desface legătura: la legătura prin fir sensul comprimării firului sau către punctul de ancorare iar la reazem sensul în care punctul poate să se desprindă de acesta.

3. Pentru a găsi, dacă se cer, condiţiile în care punctul se desface de legătură, se impune în sistemul de ecuaţii de echilibru condiţia de anulare a expresiei de calcul a reacţiunii normale.

4. S-a constatat experimental că factorii cei mai importanţi, care determină mărimea coeficientului de frecare de alunecare μ, sunt rugozitatea suprafeţelor în contact şi materialul din care sunt confecţionate.

3.2. Statica rigidului

3.2.1. Statica rigidului liber

Un rigid este liber dacă poate ocupa orice poziție în spațiu, poziție care depinde de sistemul de forțe care acționează asupra lui.

Condiția necesară și suficientă ca un rigid liber care se găsea inițial în repaus să rămână în echilibru după aplicarea unui sistem de solicitări, este ca sistemul să aibă torsorul nul, adică să fie satisfăcute ecuațiile de echilibru:

$$\vec{\mathcal{R}} = 0 \qquad \vec{\mathcal{M}}_O = 0. \tag{3.13}$$

Condiția este necesară, deoarece, în caz că nu este îndeplinită, sistemul se reduce fie la un vector unic, fie la un cuplu, fie la un torsor minimal care, după cum arată experiența, imprimă mișcări corpului. Condiția este suficientă pentru că, dacă este îndeplinită, sistemul este echivalent cu zero și rigidul continuă să rămână în repaus.

Proiectând pe axele unui reper ecuațiile vectoriale (3.13), va rezulta următorul sistem de șase ecuații scalare de echilibru:

$$\mathcal{R}_x = \sum_{i=1}^{i=n} F_{i_x} = 0\,,\ \mathcal{R}_y = \sum_{i=1}^{i=n} F_{i_y} = 0\,,\ \mathcal{R}_z = \sum_{i=1}^{i=n} F_{i_z} = 0\,,$$

$$\mathcal{M}_{O_x} = \sum_{i=1}^{i=n} M_{O_x}(F_i) = 0\,, \mathcal{M}_{O_y} = \sum_{i=1}^{i=n} M_{O_y}(F_i) = 0\,, \mathcal{M}_{O_z} = \sum_{i=1}^{i=n} M_{O_z}(F_i) = 0\,, \tag{3.14}$$

Sistemul poate avea maxim șase necunoscute scalare care pot fi parametri de poziție sau componente ale forțelor. Dacă sistemul de ecuații conține mai mult de șase necunoscute, problema este static nedeterminată și nu face obiectul preocupărilor din această lucrare. Există situații particulare când poziția de repaus este nedeterminată sau imposibilă.

3.2.2. Statica rigidului supus la legături

Dacă rigidul este supus la legături, atunci, ca şi în cazul punctului material, conform axiomei legăturilor, acestea se înlocuiesc cu reacţiuni, problema reducându-se astfel la o problemă echivalentă a unui solid rigid liber.

Legăturile la care poate fi supus un rigid sunt în număr de patru: legătura prin fir sau tijă, reazemul simplu, articulaţia şi încastrarea. Aceste legături se înlocuiesc cu un torsor al reacţiunilor, notat $\{\vec{R}, \vec{M}_O\}$, astfel că, dacă torsorul forţelor date este $\{\vec{\mathcal{R}}, \vec{\mathcal{M}}_O\}$, atunci ecuaţiile de echilibru se scriu:

$$\vec{\mathcal{R}} + \vec{R} = 0, \quad \vec{\mathcal{M}}_O + \vec{M}_O = 0. \tag{3.15}$$

Acest sistem de ecuaţii vectoriale se proiectează pe axele unui reper şi furnizează şase ecuaţii scalare:

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}_x + R_x = 0, \quad \mathcal{M}_{O_x} + M_{O_x} = 0, \\ &\mathcal{R}_y + R_y = 0, \quad \mathcal{M}_{O_y} + M_{O_y} = 0, \\ &\mathcal{R}_z + R_z = 0, \quad \mathcal{M}_{O_z} + M_{O_z} = 0, \end{aligned} \tag{3.16}$$

În cazul unui sistem de forţe coplanare situate, de exemplu, în planul xOy, numărul de ecuaţii scalare se reduce la trei:

$$\mathcal{R}_x + R_x = 0, \quad \mathcal{R}_y + R_y = 0, \quad \mathcal{R}_z + R_z = 0. \tag{3.17}$$

Necunoscutele pot fi elemente din torsorul reacţiunilor, elemente care determină poziţia de echilibru sau forţe care acţionează asupra rigidului şi care trebuie să-l menţină într-o poziţie dată de echilibru.

Problema de statică poate fi determinată atunci când numărul de ecuaţii este egal cu numărul de necunoscute sau nedeterminată atunci când numărul de necunoscute depăşeşte numărul de ecuaţii. În unele situaţii se poate ca poziţia de echilibru să fie imposibilă.

În continuare vor fi prezentate cele patru tipuri de legături la care poate fi supus un solid rigid.

1. Reazemul simplu.

a) Reazemul simplu ideal.

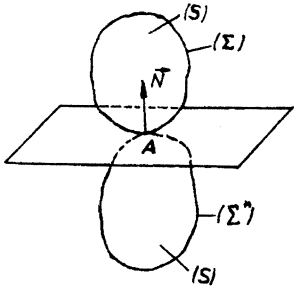


fig. 3.4.

Se consideră un solid rigid (S) cu suprafața (Σ) și un solid (S^*) cu suprafața (Σ^*). Legătura dintre (S) și (S^*) se numește reazem simplu dacă cele două suprafețe (Σ) și (Σ^*) au în comun un punct A în care ele au și același plan tangent (fig. 3.4). În cazul legăturii ideale, torsorul reacțiunii legăturii în punctul A este:

$$T_A = \begin{cases} \vec{\mathcal{R}} = \vec{N}, \\ \vec{\mathcal{M}}_A = 0. \end{cases} \tag{3.18}$$

Reacțiunea $\vec{N}$ se numește reacțiune normală și este perpendiculară pe planul tangent comun, adică are direcția normalei comune în punctul A a celor două suprafețe în contact, sensul este acela al desființării legăturii iar modulul este necunoscut (fig. 3.5.a). În multe situații, în punctul A una din suprafețe nu

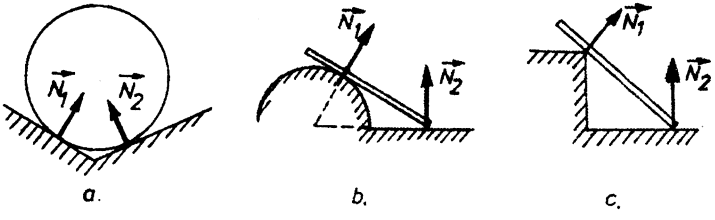


fig. 3.5.

admite plan tangent (punctul A este punct singular în care nu este definită normala). În astfel de cazuri direcția reacțiunii este normală la planul tangent dus în punctul A la suprafața care admite un plan tangent adică este coliniară

cu normala la suprafața care admite normală (fig. 3.5.b și fig. 3.5.c).

b) Reazemul simplu real.

În cazul legăturii reale, contactul dintre cele două suprafețe nu se mai poate modela ca un contact punctual, ci trebuie luat în considerare faptul că cele două suprafețe se deformează, în zona de reazem apărând o suprafață de contact. În fiecare punct al acestei suprafețe apare o forță de reacțiune de mărime și direcție necunoscută. Apare deci un sistem de forțe de reacțiune distribuit continuu, care se reduc în polul A la un torsor având componentele $\{\vec{R}, \vec{M}_A\}$ necunoscute (fig. 3.6). Considerând că asupra rigidului (S) acționează și un sistem de forțe date al cărui torsor în punctul A are componentele $\{\vec{\mathcal{R}}, \vec{\mathcal{M}}_A\}$, atunci, din condițiile de echilibru, rezultă:

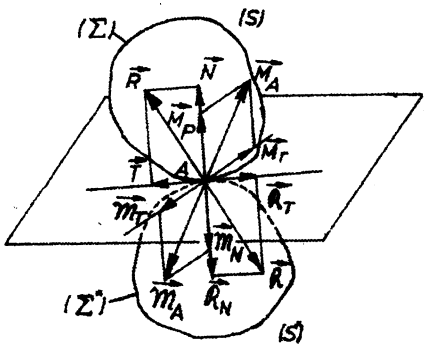


fig. 3.6.

$$\vec{\mathcal{R}} + \vec{R} = 0,$$

$$\vec{\mathcal{M}}_A + \vec{M}_A = 0. \qquad (3.19)$$

Se descompun acești vectori după o direcție normală în A la suprafața teoretică în contact și după o direcție situată în planul tangent la suprafața teoretică în contact (fig. 3.6), obținându-se relațiile:

$$\vec{\mathcal{R}}_N + \vec{N} = 0, \quad \vec{\mathcal{M}}_N + \vec{M}_P = 0,$$

$$\vec{\mathcal{R}}_T + \vec{T} = 0, \quad \vec{\mathcal{M}}_T + \vec{M}_r = 0. \qquad (3.20)$$

Componenta $\vec{\mathcal{R}}_N$ tinde să deplaseze corpul în direcția normală la suprafața teoretică în contact, acestei tendințe opunându-se **reacțiunea normală** $\vec{N}$.

Componenta $\vec{\mathcal{R}}_T$ tinde să deplaseze corpul în planul tangent la supra-

fața teoretică în contact, deplasare care se numește **alunecare**, și este împiedicată de reacțiunea $\vec{T}$ numită **forță de frecare la alunecare**.

Cuplul de moment $\vec{\mathcal{M}}_N$ are tendința de a roti corpul în jurul normalei la suprafața teoretică în contact, mișcare care se numește **pivotare**, și este împiedicată de cuplul de moment $\vec{M}_P$ numit **cuplul de frecare de pivotare**.

Cuplul de moment $\vec{\mathcal{M}}_T$ are tendința de a roti corpul în jurul unei axe din planul tangent la suprafața teoretică în contact, mișcare care se numește **rostogolire**, și este împiedicată de cuplul de moment $\vec{M}_r$ numit **cuplu de frecare de rostogolire**.

Din cele de mai sus rezultă că, în reazemul simplu real, apar trei tipuri de frecare calitativ diferite: frecare la alunecare, frecare de pivotare și frecare de rostogolire. Pe baza unor studii experimentale s-a demonstrat că atât forțele de frecare cât și momentele cuplurilor de frecare au valori maxime pe care nu le pot depăși. Astfel, modulul forței de frecare de alunecare $\vec{T}$, forță care se opune tendinței de alunecare, îndeplinește condiția:

$$\left|\vec{T}\right| \leq \mu \left|\vec{N}\right|, \tag{3.21}$$

unde μ este coeficientul adimensional de frecare de alunecare și depinde de rugozitatea suprafețelor în contact și de materialul din care sunt executate aceste suprafețe.

Modulul momentului cuplului de frecare de rostogolire, cuplu care se opune tendinței de rostogolire, îndeplinește condiția:

$$\left|\vec{M}_r\right| \leq s \left|\vec{N}\right|, \tag{3.22}$$

unde s se numește coeficient de frecare la rostogolire și are dimensiune de lungime. Modulul momentului cuplului de frecare de pivotare, cuplu care se opune tendinței de pivotare, îndeplinește condiția:

$$\left|\vec{M}_P\right| \le \nu \left|\vec{N}\right|, \tag{3.23}$$

în care ν este denumit coeficientul de frecare de pivotare şi are tot dimensiune de lungime, formula de calcul a acestuia depinzând de forma pivotului. De exemplu, pentru axul pivot din fig. 3.7.a, care se sprijină pe o coroană circulară de raze r şi R, se poate demonstra că ν se calculează cu formula:

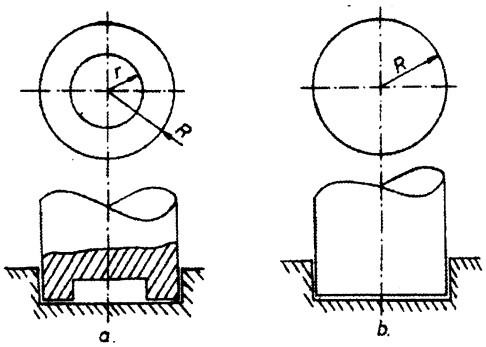


fig. 3.7.

$$\nu = \frac{2}{3}\mu \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}, \tag{3.24}$$

în care μ este coeficientul de frecare de alunecare. Dacă r = 0, adică suprafaţa de sprijin a axului vertical este un cerc de rază R (fig. 3.7.b), atunci formula de calcul a lui ν devine:

$$\nu = \frac{2}{3}\mu R. \tag{3.25}$$

Inegalităţile (3.21), (3.22) şi (3.23) devin egalităţi în cazul echilibrului la limită, când, dacă se cunosc coeficienţii μ, s şi ν, singura necunoscută rămâne $\left|\vec{N}\right|$. În caz contrar, când echilibrul nu este la limită, $\left|\vec{T}\right|$, $\left|\vec{M}_P\right|$ şi $\left|\vec{M}_r\right|$ sunt necunoscute ale problemei care satisfac cele trei inegalităţi.

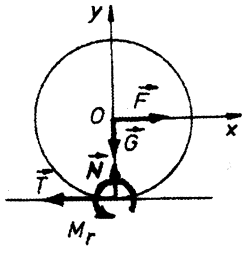


fig. 3.8.

Pentru a exemplifica frecarea de rostogolire, se consideră exemplul roţii trase. O roată de vehicul de rază R şi greutate repartizată $\vec{G}$ este acţionată de forţa de tracţiune $\vec{F}$ ce acţionează în centrul ei (fig.3.8). Cunoscând coeficientul de frecare de alunecare μ şi cel de frecare de rostogolire s, să se determi-

ne mărimea forţei $\vec{F}$ pentru care roata rămâne în echilibru.

Ecuaţiile de echilibru sunt:

$$\begin{aligned}
&Ox: \left|\vec{F}\right| - \left|\vec{T}\right| = 0, \\
&Oy: \left|\vec{N}\right| - \left|\vec{G}\right| = 0, \\
&M_O: -\left|\vec{T}\right| R + \left|\vec{M}_r\right| = 0 \\
&\left|\vec{T}\right| \le \mu \left|\vec{N}\right| \\
&\left|\vec{M}_r\right| \le s \left|\vec{N}\right|
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Rezultă două inegalităţi, şi anume:

$$\left|\vec{F}\right| \le \mu \left|\vec{G}\right|, \tag{3.27}$$

care exprimă condiţia ca roata că nu alunece şi:

$$\left|\vec{F}\right| \le \frac{s}{R} \left|\vec{G}\right|, \tag{3.27}$$

care exprimă condiţia ca roata să nu se rostogolească. Condiţia de echilibru constă în faptul ca $\left|\vec{F}\right|$ să îndeplinească ambele condiţii simultan, adică să fie mai mic decât cea mai mică valoare a expresiilor $\frac{s}{R}\left|\vec{G}\right|$ şi $\mu\left|\vec{G}\right|$.

2. Articulaţia.

a. Articulaţia ideală.

Între un solid (S) şi un solid (S^*) există o articulaţie dacă un punct O al solidului (S) este fixat şi coincide cu un punct O^* al solidului (S^*). În funcţie de procedeul folosit pentru fixare, există două tipuri de articulaţii: articulaţia sferică (fig. 3.9) şi articulaţie cilindrică (fig. 3.10). Articulaţia sferică este formată dintr-un locaş sferic prins de rigidul (S) şi o sferă, prinsă de

rigidul (S^*), care se poate roti în locaşul sferic. Articulaţia cilindrică, numită şi lagăr de alunecare, este formată dintr-un ax fixat de rigidul S şi un cilindru, fixat de rigidul (S^*), care se poate roti în jurul axului.

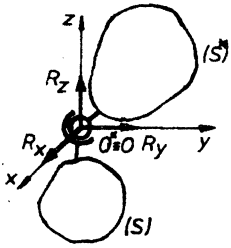


fig. 3.9.

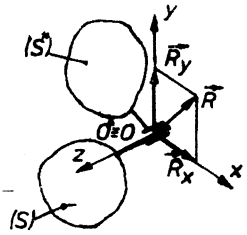


fig. 3.10.

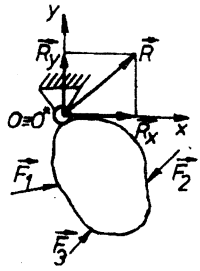


fig. 3.11.

Articulaţia cilindrică nu poate împiedica deplasarea axului în lungul cilindrului, de aceea ea se foloseşte când sistemul de forţe care acţionează asupra solidului se găseşte într-un plan normal la axa articulaţiei cilindrice (planul xOy în fig. 3.10) sau în combinaţie cu alte tipuri de legături care să nu permită deplasarea axului faţă de cilindru.

Torsorul reacţiunilor în polul O, care coincide cu polul O^*, este format dintr-o reacţiune unică $\vec{R}$, necunoscută, care se descompune după trei axe de direcţie arbitrară dar reciproc perpendiculare în cazul articulaţiei sferice (fig. 3.9.) şi după două axe de direcţie arbitrară dar reciproc perpendiculare şi normale la axa articulaţiei în cazul articulaţiei cilindrice (fig. 3.10). Componentele reacţiunii după cele trei şi respectiv două axe sunt forţe necunoscute ale sistemului de ecuaţii de echilibru şi sensul lor este ales arbitrar. Deci, în cazul articulaţiei sferice avem:

$$T_O = \begin{cases} \vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}, \\ \vec{M}_O = 0, \end{cases} \tag{3.29}$$

iar în cazul articulaţiei cilindrice:

$$T_O = \begin{cases} \vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j}, \\ \vec{M}_O = 0, \end{cases} \tag{3.30}$$

Prin urmare, în sistemul de ecuații de echilibru, articulația sferică introduce trei mărimi necunoscute: R_x, R_y şi R_z, iar articulația cilindrică două: R_x şi R_y. Dacă, în urma rezolvării sistemului, vreuna dintre ele rezultă negativă, înseamnă că, în realitate, sensul ei este opus celui presupus inițial.

Observație:

În cazul când forțele care acționează asupra solidului rigid sunt coplanare, atunci reprezentarea grafică a articulației cilindrice se face ca în fig.3.11., problema fiind o problemă de echilibru în plan.

b. Articulația reală.

Uneori nu se pot neglija forțele de frecare care iau naştere în articulații. De exemplu, în articulația cilindrică, ia naştere un moment de frecare $\vec{M}_f$ care se opune tendinței de rotație a axului în cilindru şi a cărui mărime satisface inegalitatea:

$$\left|\vec{M}_f\right| \le \mu' \cdot r\left|\vec{R}\right|, \tag{3.31}$$

în care r este raza axului, $\vec{R}$ este reacțiunea legăturii cu $\left|\vec{R}\right| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$, iar μ' este numit coeficient de frecare în lagăr şi se poate determina experimental sau se poate calcula cu relația [11]:

$$\mu' = \frac{\mu + \frac{s}{r}}{\sqrt{1+\mu^2}}, \tag{3.32}$$

unde μ este coeficientul de frecare de alunecare, s este coeficientul de frecare de rostogolire iar r este raza axului articulației cilindrice.

Relația (3.31) este de egalitate în cazul echilibrului la limită. Dacă echilibrul nu este la limită, atunci momentul de frecare în articulație este necunoscut şi se adaugă celorlalte necunoscute din sistemul de ecuații de echilibru.

O relație similară cu (3.31) se poate scrie şi pentru articulație sferică

cu precizarea că acum $\vec{R}$ are trei componente, r este raza sferei iar μ' este coeficientul de frecare în articulație și se determină experimental.

3. Legătura prin fir sau tijă

Acest tip de legătură a fost întâlnit și la punctul material. Firul este considerat ideal, adică inextensibil, perfect flexibil și de greutate neglijabilă.

Tija este o bară rigidă de greutate neglijabilă, prevăzută la fiecare capăt cu câte o articulație ideală.

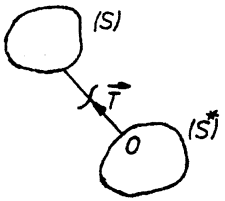


fig. 3.12.

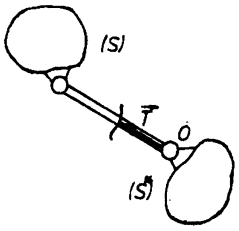


fig. 3.13.

Torsorul reacțiunii legăturii prin fir (fig. 3.12) în polul O este format dintr-o forță unică $\vec{T}$, de modul necunoscut, numită tensiune în fir, dirijată în lungul firului cu sensul spre punctul de ancorare (dacă se taie firul, ea trebuie să mențină corpul în poziția de echilibru) și având punctul de aplicație în locul în care firul este prins de corp:

$$T_O = \begin{cases} \vec{R} = \vec{T} \\ \vec{M}_O = 0 \end{cases}. \tag{3.33}$$

Torsorul reacțiunii legăturii prin tijă (fig. 3.13.) în polul O este format dintr-o forță unică $\vec{T}$, de modul necunoscut, numită efort în tijă, dirijată în lungul tijei având sensul ales arbitrar iar punctul de aplicație în articulație cu care este prinsă de corp:

$$T_O = \begin{cases} \vec{R} = \vec{T} \\ \vec{M}_O = 0 \end{cases}. \tag{3.34}$$

Firul și tija introduc în sistemul de ecuații scalare de echilibru o singură necunoscută și anume mărimea reacțiunii $|\vec{T}|$. În cazul tijei, dacă, în urma

rezolvării sistemului de ecuații de echilibru, semnul reacțiunii rezultă negativ, atunci sensul real al acesteia este opus celui presupus inițial.

Observație:

Faptul că articulația de la capătul tijei nu se înlocuiește cu componentele reacțiunii așa cum am văzut că se procedează în cazul articulației, se datorează situației speciale din acest caz în care tija și reacțiunea articulației sunt coliniare, adică reacțiunea articulației are direcție cunoscută.

4. Încastrarea

Un solid (S) este legat prin încastrare de un solid (S^*) (este încastrat în solidul (S^*)) atunci când este fixat rigid de acesta, adică practic (S) și (S^*) fac împreună un corp comun, neputându-se modifica în vreun fel poziția rigidului (S) față de a rigidului (S^*) (fig. 3.14). Dacă unul dintre corpuri este în echilibru, atunci automat și celălalt va fi în echilibru.

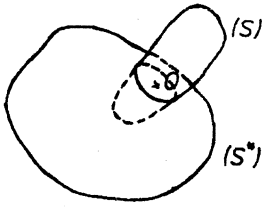


fig. 3.14.

Zona de contact dintre cele două corpuri este o suprafață oarecare, care conține punctul teoretic de contact O (fig. 3.14).

Atunci când solidul (S) este supus acțiunii unui sistem spațial de forțe oarecare $\vec{F}_i$ $(i = 1,2,...,n)$ încastrarea se numește spațială iar torsorul reacțiunii legăturii în polul O este format dintr-o reacțiune rezultantă $\vec{R}$ și un moment rezultant $\vec{M}_O$, ambele necunoscute, care sunt proiectate pe axele unui reper cartezian ales, de exemplu, cu polul în O și având axele de direcții arbitrare (fig. 3.15):

$$T_O = \begin{cases} \vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k} \\ \vec{M}_O = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k} \end{cases}. \qquad (3.35)$$

Dacă solidul este supus acţiunii unui sistem de forţe coplanare $\vec{F}_i$

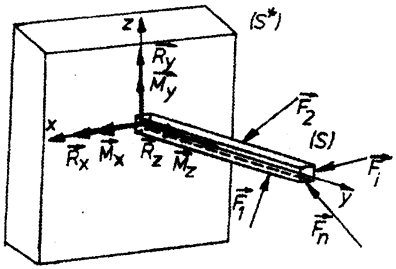


fig. 3.15.

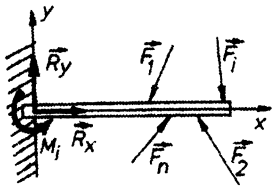


fig. 3.16.

$(i = 1,2,...,n)$, atunci încastrarea se numeşte plană, iar torsorul reacţiunii legăturii în polul O este format dintr-o reacţiune rezultantă $\vec{R}$ situată în planul forţelor şi un cuplu $\vec{M}_i$ perpendicular pe planul forţelor, ambele necunoscute, care se proiectează pe axele unui reper cartezian ales, de exemplu, cu polul în O şi cu axele de direcţii arbitrare (fig. 3.16):

$$T_O = \begin{cases} \vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j}, \\ \vec{M}_O = M_i\vec{k}. \end{cases} \tag{3.36}$$

În concluzie, încastrarea spaţială introduce în sistemul de ecuaţii de echilibru şase necunoscute scalare R_x, R_y, R_z, M_x, M_y, M_z, sensul proiecţiilor componentelor torsorului fiind ales arbitrar, iar încastrarea plană trei necunoscute scalare R_x, R_y, M_i, sensul proiecţiilor componentelor torsorului fiind, şi aici, ales arbitrar. Necunoscutele care rezultă cu semnul minus în urma rezolvării sistemului de ecuaţii de echilibru au, în realitate, sens opus decât cel presupus iniţial.

Observaţie:

Numărul de necunoscute care apar ca urmare a legăturii prin încastrare este egal cu numărul de ecuaţii scalare de echilibru, atât în cazul spaţial cât şi în cazul plan, ceea ce conduce la imposibilitatea de a mai putea avea în sistem şi alte necunoscute în afară de cele introduse de încastrare.

3.3. Statica sistemelor

Prin sistem se înțelege un ansamblu de corpuri care interacționează. Corpurile vor fi modelate ca puncte materiale şi/sau solide rigide.

Un sistem este în echilibru dacă fiecare corp din sistem este în echilibru.

Corpurile unui sistem sunt supuse la două categorii de forțe: forțe exterioare sistemului care cuprind forțele date şi forțele datorate interacțiunii cu alte corpuri care nu aparțin sistemului şi forțe interioare care apar ca urmare a interacțiunii dintre corpurile sistemului.

Presupunem că un sistem aflat în echilibru este constitui din M_i $(i=1,2,...,n)$ puncte materiale şi (S_j) $(j=1,2,...,m)$ solide rigide. Dacă solidul (S_j) acționează asupra punctului M_i cu o forță $\vec{F}_i(S_j)$, punctul M_i va acționa asupra rigidului (S_j) cu o forță $\vec{F}_j(M_i)$ şi, conform principiului acțiunii şi reacțiunii, vom avea:

$$\vec{F}_i(S_j)+\vec{F}_j(M_i)=0. \tag{3.37}$$

Dacă solidul (S_j) acționează asupra solidului (S_k) cu un torsor $\{\vec{R}_{kj},\vec{M}_{kj}\}$, atunci solidul (S_k) acționează asupra solidului (S_j) cu un torsor $\{\vec{R}_{jk},\vec{M}_{jk}\}$ şi, conform principiului acțiunii şi reacțiunii, vom avea:

$$\begin{matrix}\vec{R}_{kj}+\vec{R}_{jk}=0\\ \vec{M}_{O_{kj}}+\vec{M}_{O_{jk}}=0\end{matrix},\ k\neq j, \tag{3.38}$$

unde momentele sunt calculate în raport cu acelaşi pol O.

Dacă două puncte materiale din sistem M_i şi M_s acționează, pe baza principiului acțiunii şi reacțiunii, unul asupra celuilalt cu forțele $\vec{F}_{is}$ şi $\vec{F}_{si}$, atunci avem:

$$\vec{F}_{is} + \vec{F}_{si} = 0\,, \quad s \neq i\,. \tag{3.39}$$

Notând cu $\vec{F}_{ext_i}$ rezultanta forțelor exterioare care acționează asupra punctului M_i şi cu $\{\vec{F}_{ext_j}, \vec{M}_{O\,ext_j}\}$ torsorul în polul O al forțelor exterioare care acționează asupra solidului (S_j), ecuațiile de echilibru pentru punctele (M_i) din sistem sunt:

$$\vec{F}_{ext_i} + \sum_{s=1}^{s=n} \vec{F}_{is} + \sum_{j=1}^{j=m} \vec{F}_i(S_j) = 0,\ s \neq i,\ i = 1,2,...,n\,, \tag{3.40}$$

iar ecuațiile de echilibru pentru solidele (S_j) din sistem sunt:

$$\vec{F}_{ext_j} + \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_j(M_i) + \sum_{k=1}^{k=m} \vec{R}_{jk} = 0,$$

$$\vec{M}_{O\,ext_j} + \sum_{i=1}^{i=n} \vec{M}_O(\vec{F}_j(M_i)) + \sum_{k=1}^{k=m} \vec{M}_{O\,jk} = 0,\ k \neq j,\ j = 1,2,...,m\,, \tag{3.41}$$

Dacă se notează:

$$\sum_{s=1}^{s=n} \vec{F}_{is} + \sum_{j=1}^{j=m} \vec{F}_i(S_j) = \vec{F}_{int_i}\,,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_j(M_i) + \sum_{k=1}^{k=m} \vec{R}_{jk} = \vec{F}_{int_j} \tag{3.42}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \vec{M}_O(\vec{F}_j(M_i)) + \sum_{k=1}^{k=m} \vec{M}_{O\,jk} = \vec{M}_{O\,int_j}$$

atunci ecuațiile de echilibru (3.40) şi (3.41) capătă forma:

– pentru punctul (M_i) $\vec{F}_{ext_i} + \vec{F}_{int_i} = 0,\ i = 1,2,...,n\,,$ (3.43)

– pentru rigidul (S_j) $\begin{cases} \vec{F}_{ext_j} + \vec{F}_{int_j} = 0,\ j = 1,2,...,m \\ \vec{M}_{O\,ext_j} + \vec{M}_{O\,int_j} = 0,\ j = 1,2,...,m \end{cases}$ (3.44)

Există trei metode de rezolvare a problemelor de statica sistemelor care vor fi prezentate în continuare.

1. Metoda izolării corpurilor.

Această metodă presupune, aşa după cum îi spune şi numele, izolarea fiecărui corp din sistem şi scrierea ecuaţiilor de echilibru (3.43) şi (3.44). Deoarece un torsor nul într-un pol este nul în orice pol, atunci ecuaţiile de echilibru (3.43) şi (3.44) se pot scrie pentru corpuri diferite în poli diferiţi. Se obţine un sistem de maximum 3n+6m ecuaţii scalare de echilibru. Dacă numărul de ecuaţii este egal cu numărul de necunoscute, problema se numeşte static determinată. Dacă numărul de ecuaţii nu este egal cu numărul de necunoscute, problema se numeşte static determinată.

Ca necunoscute ale sistemului de ecuaţii de echilibru sunt componentele torsorilor reacţiunilor interioare şi exterioare, unele forţe date sau unele elemente care dau poziţia de echilibru.

2. Metoda solidificării întregului sistem

Când un sistem este în echilibru, pentru fiecare punct M_i din sistem este satisfăcută relaţia:

$$\vec{F}_{ext_i} + \vec{F}_{int_i} = 0,\ i = 1,2,...,n \qquad (3,.45)$$

Multiplicând fiecare relaţie (3.45) cu $\vec{r}_i$ prin înmulţire vectorială la stânga, se obţine:

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{ext_i} + \vec{r}_i \times \vec{F}_{int_i} = 0,\ i = 1,2,...,n\,, \qquad (3.46)$$

adică

$$\vec{M}_{O\,ext_i} + \vec{M}_{O\,int_i} = 0,\ i = 1,2,...,n\,. \qquad (3.47)$$

Condiţia anterioară nu trebuia impusă pentru echilibru, deoarece ea este satisfăcută de la sine dacă are loc (3.43) întrucât forţele ce acţionează asupra punctului M_i sunt vectori concurenţi legaţi şi are loc teorema lui Varignon.

Prin adunarea celor n+m ecuaţii de forţe din (3.43) şi (3.44) şi ţinând

cont de (3.37), (3.38) şi (3.39) adică de faptul că vectorul rezultant al tuturor forţelor interioare este nul, rezultă:

$$\vec{\mathcal{R}}_{ext} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_{ext_i} + \sum_{j=1}^{j=m} \vec{F}_{ext_j} = 0. \qquad (3.48)$$

Prin adunarea celor m relaţii de echilibru de momente din (3.44) şi a celor n relaţii (3.47) şi ţinând cont că vectorul moment rezultant al tuturor solicitărilor interioare este nul deoarece formează perechi de vectori direct opuşi datorită principiului acţiunii şi reacţiunii, se obţine:

$$\vec{\mathcal{M}}_{O\,ext} = \sum_{i=1}^{i=n} M_{O\,ext_i} + \sum_{j=1}^{j=m} M_{O\,ext_j} = 0. \qquad (3.49)$$

Deci ecuaţiile de echilibru pentru întregul sistem sunt:

$$\vec{\mathcal{R}}_{ext} = 0,$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{O\,ext} = 0, \qquad (3.50)$$

asemănătoare cu cele de la solidul rigid, ecuaţii care rezultă prin tratarea sistemului ca un întreg solidificat, de unde şi denumirea metodei de metoda solidificării.

Ecuaţiile de echilibru (3.50) conţin numai forţele exterioare date şi forţele de reacţiune provenind de la legăturile exterioare adică cele dintre sistem şi mediu. În general sistemul de ecuaţii vectoriale furnizează şase ecuaţii scalare şi trei ecuaţii scalare de echilibru în cazul unui sistem spaţial şi trei ecuaţii scalare în cazul unui sistem plan, ceea ce, de regulă, nu este suficient pentru a determina necunoscutele problemei.

3. Metoda echilibrului părţilor

Dacă din sistemul dat, aflat în echilibru, se izolează o parte (un subsistem), atunci această parte a sistemului este în echilibru sub acţiunea solicitărilor ce acţionează numai asupra acestei părţi.

Într-adevăr, considerând numai o parte din ecuațiile de echilibru, și anume pentru corpurile care aparțin părții izolate, iar apoi adunând separat ecuațiile de forță și separat ecuațiile de moment, se obțin două ecuații vectoriale de echilibru pentru partea izolată din sistem. Forțele interioare sistemului din zona de separație a subsistemului devin, pentru subsistem, forțe exterioare.

3.4. Aplicații

1. Să se determine forța $\vec{F}$ pentru care un punct material de greutate $\vec{G}$ poate rămâne în repaus pe un plan aspru, înclinat cu un unghi α față de orizontală, cunoscând că valoarea coeficientului de frecare de alunecare este μ (fig. 3.17.a).

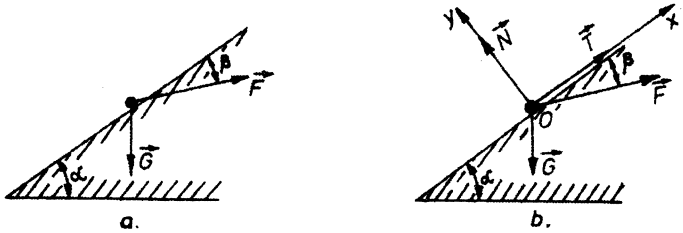


fig. 3.17.

Există două situații distincte.

a) Punctul are tendința de a aluneca spre baza planului înclinat (fig.3.17.b). Ecuațiile de echilibru față de un reper xOy considerat ca în figură, sunt:

$$\text{Ox: } |\vec{F}|\cos\beta + |\vec{T}| - |\vec{G}|\sin\alpha = 0\,,$$

$$\text{Oy: } |\vec{N}| - |\vec{F}|\sin\beta - |\vec{G}|\cos\alpha = 0\,.$$

Deoarece echilibrul nu este la limită, forța de frecare $|\vec{T}|$ este necunos-

cută şi satisface inegalitatea:

$$|\vec{T}| \le \mu |\vec{N}| .$$

Explicitând necunoscutele $|\vec{N}|$ şi $|\vec{T}|$ din ecuaţiile de proiecţie de forţe, se obţine:

$$|\vec{N}| = |\vec{F}| \sin\beta + |\vec{G}| \cos\alpha ,$$

$$|\vec{T}| = |\vec{G}| \sin\alpha - |\vec{F}| \cos\beta .$$

Înlocuind aceste valori în inegalitate, avem:

$$|\vec{G}|(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \le |\vec{F}|(\cos\beta + \mu\sin\beta) ,$$

de unde se obţine condiţia ca punctul să nu alunece spre baza planului înclinat:

$$|\vec{F}| \ge \frac{|\vec{G}|(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\cos\beta + \mu\sin\beta} \quad \text{dacă } \sin\alpha - \mu\cos\alpha > 0 .$$

În cazul în care $\sin\alpha - \mu\cos\alpha \le 0$, adică $\mathrm{tg}\alpha \le \mu$ atunci punctul material nu alunecă spre baza planului oricare ar fi mărimea lui $|\vec{F}|$, fenomen denumit autofixare.

b. Punctul are tendinţa de a urca pe plan.

Situaţia aceasta se tratează analog cu cea de la punctul a cu deosebirea că forţa $\vec{T}$ capătă, în fig. 3.17.b, sens invers faţă de cel desenat. Ecuaţiile de echilibru sunt acum:

$$|\vec{F}| \cos\beta - |\vec{T}| - |\vec{G}| \sin\alpha = 0 ,$$

$$|\vec{N}| - |\vec{F}| \sin\beta - |\vec{G}| \cos\alpha = 0 .$$

După explicitarea necunoscutelor $\vec{N}$ şi $\vec{T}$ şi înlocuirea expresiilor lor în inegalitate, se obţine:

$$|\vec{F}| \le \frac{|\vec{G}|(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\beta - \mu\sin\beta} \quad \text{dacă } \cos\beta - \mu\sin\beta > 0 .$$

În cazul în care $\cos\beta - \mu\sin\beta \le 0$, adică $\mathrm{tg}\beta \ge \frac{1}{\mu}$, punctul material nu alunecă în susul planului înclinat oricare ar fi valoarea lui $\vec{F}$, fenomen denumit autoblocare.

Dacă $\cos\alpha - \mu\sin\alpha > 0$ şi $\cos\beta - \mu\sin\beta > 0$, condiţia pe care trebuie să o îndeplinească $\vec{F}$ pentru ca punctul să rămână în echilibru pe plan este:

$$\frac{|\vec{G}|(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\cos\beta + \mu\sin\beta} \le |\vec{F}| \le \frac{|\vec{G}|(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\beta - \mu\sin\beta}.$$

Observaţie:

În general, la rezolvarea problemelor, se renunţă la scrierea modulilor forţelor cu notaţia obişnuită şi, pentru uşurinţa scrierii, se scrie doar litera ce notează forţa. De exemplu, în loc de $|\vec{G}|$ se scrie simplu G, fără a uita că, prin aceasta, se înţelege modulul forţei. În exemplele următoare se va renunţa la notaţia cu bare a modulului.

2. O bară AB de lungime 6l şi greutate G este încastrată în A şi supusă acţiunii unui cuplu de moment M, unei forţe $\vec{F}$ şi unei forţe distribuite triunghiular de intensitate maximă q_0[N/m] (fig. 3.18). Să se determine torsorul reacţiunilor încastrării.

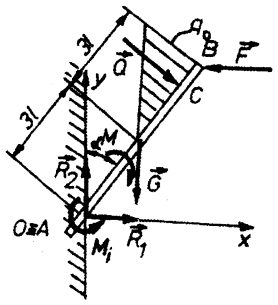


fig. 3.18.

Mai întâi se calculează vectorul rezultant $\vec{Q}$ cu care este echivalent sistemul de forţe distribuite continuu:

$$Q = \frac{3l \cdot q_0}{2},$$

şi are punctul de aplicaţie C situat la distanţa AC=5l.

Se înlocuieşte încastrarea din punctul A cu forţele $\vec{R}_1$ şi $\vec{R}_2$ cu $\vec{R}_1 \perp \vec{R}_2$ şi cu cuplul de moment M_i, sensul tuturor fiind ales arbitrar. Se alege un reper cu polul O în A deoarece aici este originea a două forţe (fig. 3.17) ceea ce face ca momentul lor să fie nul. Se proiectează forţele pe axele acestui reper şi se scrie ecuaţia de echilibru de momente, obţinându-se sistemul:

$$Ox:\ R_1 + Q\cos\alpha - F = 0,$$

$$Oy:\ R_2 - G - Q\sin\alpha = 0,$$

$$M_O:\ M_i - M - Gl\sin\alpha - Q\cdot 5l + F\cdot 6l\cos\alpha = 0.$$

Rezolvând acest sistem algebric în necunoscutele R_1, R_2 şi M_i, rezultă:

$$R_1 = F - Q\cos\alpha,$$

$$R_2 = G + Q\sin\alpha,$$

$$M_i = M + Gl\sin\alpha + Q\cdot 5l - F\cdot 6l\cos\alpha.$$

Torsorul reacţiunilor încastrării este:

$$T_O(\vec{R}) = \begin{cases} \vec{R} = \vec{R}_1\vec{i} + \vec{R}_2\vec{j} = (F - Q\cos\alpha)\vec{i} + (G + Q\sin\alpha)\vec{j} \\ \vec{M}_i = (M + Gl\sin\alpha + Q\cdot 5l - F\cdot 6l\cos\alpha)\vec{k} \end{cases},$$

cu $|\vec{R}| = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} = \sqrt{F^2 + Q^2 + G^2 + 2Q(G\sin\alpha - F\cos\alpha)}$.

3. Se consideră o placă dreptunghiulară omogenă de greutate $\vec{G}$ şi dimensiuni 4a şi b aflată în echilibru şi articulată în A şi rezemată fără frecare în B. Asupra plăcii acţionează o forţă distribuită dreptunghiular de intensitate q_0[N/m]. Să se determine reacţiunile din A şi B (fig. 3.19).

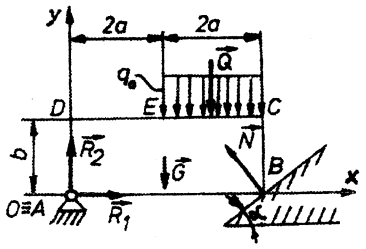


fig. 3.19.

Forţa distribuită este echivalentă cu un vector unic $\vec{Q}$ de mărime $Q=2aq_0$ şi aplicată la jumătatea segmentului EC = 2a. Se înlocuieşte articulaţia cu două forţe reciproc perpendiculare şi de

sensuri arbitrare $\vec{R}_1$ şi $\vec{R}_2$, iar reazemul cu o reacţiune $\vec{N}$ normală pe planu înclinat cu unghiul α. Se alege apoi un reper cu polul O în punctul A (fig.3.19) şi se scriu ecuaţiile de echilibru.

$$Ox:\ R_1 - N\sin\alpha = 0,$$

$$Oy:\ R_2 - G - Q + N\cos\alpha = 0,$$

$$M_O:\ -G\cdot 2a - Q\cdot 3a + N\cos\alpha\cdot 4a = 0.$$

Sistemul anterior cu necunoscutele R_1, R_2 şi N are soluţia:

$$R_1 = N\sin\alpha = \frac{2G+3Q}{4}\,tg\alpha,$$

$$R_2 = G + Q - N\cos\alpha = G + Q - \frac{2G+3Q}{4} = \frac{2G+Q}{4},$$

$$N = \frac{2G+3Q}{4\cos\alpha}.$$

Reacţiunea din articulaţie este:

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} = \frac{1}{4}\sqrt{(2G+3Q)^2 tg^2\alpha + (2G+Q)^2}.$$

4. Să se determine limitele între care poate să varieze raportul $\frac{P}{G}$ pentru ca bara AB de lungime 2l să rămână în echilibru în poziţia din fig.3.20.

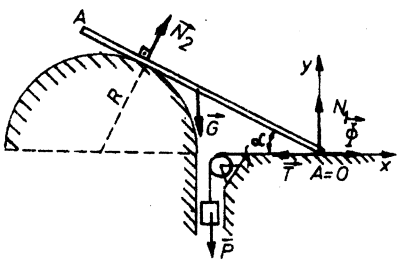


fig. 3.20.

Semicercul de rază R este luciu, între bară şi planul orizontal coeficientul de frecare este μ, scripetele este ideal iar unghiul dintre bară şi orizontală este α.

Se presupune că bara are tendinţa de a-şi deplasa capătul A spre stânga, ceea ce face ca forţa de frecare $\vec{\Phi}$, care este necunoscută deoarece echilibrul nu este la limită, să fie orientată

spre dreapta. Se alege un reper cu polul în A şi se scriu ecuaţiile de echilibru ale barei ţinând cont că tensiunea din fir $\vec{T}$ are aceeaşi mărime cu greutate $\vec{P}$. Avem acum:

$$Ox:\ \Phi - P + N_2 \sin\alpha = 0,$$

$$Oy:\ N_1 - G + N_2 \cos\alpha = 0,$$

$$M_O:\ -N_2 \cdot \frac{R}{tg\alpha} + G \cdot l \cos\alpha = 0,$$

$$\Phi \le \mu N_1.$$

Rezultă:

$$\Phi = P - \frac{Gl}{R}\sin^2\alpha,$$

$$N_1 = G - \frac{Gl}{R}\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$N_2 = \frac{Gl}{R}\sin\alpha,$$

şi

$$P - \frac{Gl}{R}\sin^2\alpha \le \mu G - \mu\frac{Gl}{R}\sin\alpha\cos\alpha.$$

Împărţim prin G şi se obţine:

$$\frac{P}{G} \le \mu - \frac{\mu l}{R}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{l}{R}\sin^2\alpha.$$

Acum presupunem că bara are tendinţa de a-şi deplasa capătul A spre dreapta, prin urmare forţa de frecare $\vec{\Phi}$ va fi orientată spre stânga, deci, în sistemul de ecuaţii de echilibru, îşi va schimba semnul. Prima ecuaţie din sistem se modifică şi are forma:

$$-\Phi - P + N_2 \sin\alpha = 0,$$

restul relaţiilor rămânând la fel. După aflarea necunoscutelor Φ, N_1 şi N_2 şi înlocuirea lor în inegalitate, se obţine:

$$\frac{P}{G} \ge \frac{l}{R}\sin^2\alpha + \frac{\mu l}{R}\sin\alpha\cos\alpha - \mu.$$

În concluzie, pentru ca bara să rămână în echilibru sub unghiul α,

trebuie ca raportul $\frac{P}{G}$ să satisfacă dubla inegalitate:

$$\frac{1}{R}\sin\alpha(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)-\mu\le\frac{P}{G}\le\frac{1}{R}\sin\alpha(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)+\mu.$$

5. Să se determine mărimea forței $\vec{F}$ și reacțiunile din legături astfel încât sistemul din fig. 3.21. să fie în echilibru la limită. Se consideră cunoscute: dimensiunile a, b, c, r, R, coeficienții de frecare μ_1 dintre sabot și troliu și μ_2 dintre punctul material și planul înclinat, greutățile $\vec{Q}$ și $\vec{P}$, unghiul α al planului înclinat. Pârghia cu sabot se consideră de greutate neglijabilă.

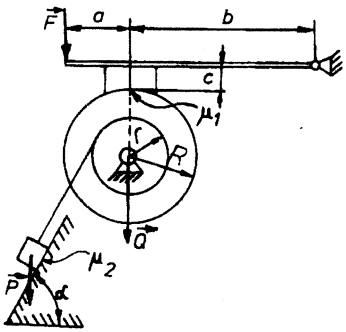
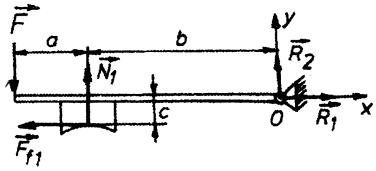


fig. 3.21.

Se desenează separat fiecare corp din sistem și se figurează toate forțele care acționează, având grijă ca **forțele provenind de la legăturile interioare să fie egale și de sens opus**. Se alege câte un reper pentru fiecare corp din sistem și se scriu ecuațiile de echilibru.



3.22.

Ox: $F_{f_1}-R_1=0$,

Oy: $-F+N_1+R_2=0$,

M_O: $F(a+b)-N_1\cdot b-F_{f_1}\cdot c=0$,

$F_{f_1}=\mu_1 N_1$.

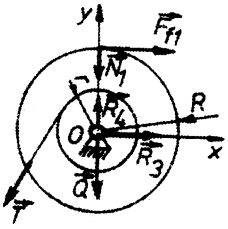


fig. 3.23.

Ox: $R_3-T\cos\alpha+F_{f_1}=0$,

Oy: $R_4-N_1-Q-T\sin\alpha=0$,

$M_O: T\cdot r-F_{f_1}\cdot R=0$.

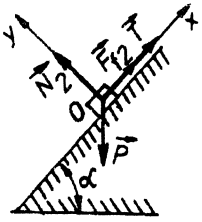


fig. 3.24.

$$\text{Ox: } F_{f_2} + T - P\sin\alpha = 0,$$

$$\text{Oy: } N_2 - P\cos\alpha = 0,$$

$$F_{f_2} = \mu_2 N_2.$$

S-au obţinut 10 ecuaţii care, după rezolvare, furnizează necunoscutele:

$$R_1 = \mu_1 N_1 = \frac{Pr}{R}(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha),$$

$$R_2 = \frac{Pr}{\mu_1 R}(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha)\frac{\mu_1 c - a}{a+b},$$

$$F_{f_1} = \frac{Pr}{R}(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha),$$

$$N_1 = \frac{Pr}{R\mu_1}(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha),$$

$$R_3 = P(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha)\left(\cos\alpha - \frac{r}{R}\right),$$

$$R_4 = Q + P(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha)\left(\frac{r}{\mu_1 R} + \sin\alpha\right),$$

$$T = P(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha),$$

$$N_2 = P\cos\alpha,$$

$$F_{f_2} = \mu_2 P\cos\alpha,$$

$$F = \frac{b + \mu_1 c}{a+b}\cdot\frac{Pr}{R\cdot\mu_1}(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha).$$

Forţa $\vec{F}$ trebuie să fie mai mare sau cel mult egală csu valoarea găsită.